EXERCICE 3 5 points

Les parties A, B et C sont indépendantes.
Dans tout l'exercice on arrondira les résultats au **millième.**

Partie A

En France, la consommation de produits bio croît depuis plusieurs années.
En 2017, le pays comptait 52 % de femmes. Cette même année, 92 % des Français avaient déjà consommé des produits bio. De plus, parmi les consommateurs de produits bio, 55 % étaient des femmes.
On choisit au hasard une personne dans le fichier des français de 2017. On note :
. F l'événement « la personne choisie est une femme » ;
. H l'événement « la personne choisie est un homme » ;
. B l'événement « la personne a déjà consommé des produits bio ».

1. Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des événements F et B.

2.a. Montrer que $P(F \cap B)=0{,}506$.
2.b. En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.
3. Calculer $P_H(\bar{B})$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans un supermarché, un chef de rayon souhaite développer l'offre de produits bio.
Afin de justifier sa démarche, il affirme à son responsable que 75 % des clients achètent des produits bio au moins une fois par mois.
Le responsable souhaite vérifier ses dires. Pour cela, il organise un sondage à la sortie du magasin.
Sur 2000 personnes interrogées, 1421 répondent qu'elles consomment des produits bio au moins une fois par mois.
Au seuil de 95 %, que peut-on penser de l'affirmation du chef de rayon ?

Partie C

Pour promouvoir les produits bio de son enseigne, le responsable d'un magasin décide d'organiser un jeu qui consiste, pour un client, à remplir un panier avec une certaine masse d'abricots issus de l'agriculture biologique, il est annoncé que le client gagne le contenu du panier si la masse d'abricots déposés est comprise entre 3,2 et 3,5 kilogrammes.
La masse de fruits en kg, mis dans le panier par les clients, peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité de densité f définie sur l'intervalle {3;4] par :

$$f(x)=\frac{2}{(x-2)^2}$$

Rappel :
On appelle fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle [a;b] toute fonction f définie, continue et positive sur [a;b], telle que l'intégrale de f sur [a;b] est égale à 1.

1. Vérifier que la fonction f précédemment définie est bien une fonction de densité f d'une loi de probabilité sur l'intervalle [3;4].

2. Le magasin annonce : « Un client sur trois gagne le panier ».
Cette annonce est-elle exacte ?

3. Cette question a pour but de calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
On rappelle que, pour une variable aléatoire X de densité f sur l'ensemble [a;b], E(X) est donnée par :

$E(X) = \int_a^b x\,f(x)\,dx$.

3.a. Vérifier que la fonction G définie sur l'intervalle [3;4] par $G(x)=\ln(x-2)-\frac{x}{x-2}$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{x}{(x-2)^2}$ sur cet intervalle.

3.b. En déduire la valrur exacte de E(X), puis sa valeur arrondie au centième.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

Partie A

1. Le pays compte 52 % de femmes donc P(F)= **0,52.**
96 % des Français avaient déjà consommé des produits bio donc P(B)= **0,92.**
Parmi les consommateurs de produits bio, 55 % étaient des femmes $P_B(F)$ = **0,55.**

2.a. $P(F\cap B)=P(B)\times P_B(F)=0{,}92\times 0{,}55$ = **0,506.**

2.b. On nous demande de calculer $P_F(B)$

$$P_F(B)=\frac{P(F\cap B)}{P(F)}=\frac{0{,}506}{0{,}52}$$ = **0,973** arrondi au millième.

3. $P_H(\bar{B})=\dfrac{P(H\cap\bar{B})}{P(H)}$

$H=\bar{F}$ $\quad P(H)=1-P(F)=1-0{,}52=0{,}48$

$P(\bar{B})=1-P(B)=1-0{,}92=0{,}08$ $\quad P(\bar{B})=P(F\cap\bar{B})+P(H\cap\bar{B})$ (Formule des probabilités totales).

$P(F)=P(F\cap B)+P(F\cap\bar{B}) \quad \Leftrightarrow \quad P(H\cap\bar{B})=P(F)-P(F\cap B)=0{,}52-0{,}506=0{,}014$

$P(H\cap\bar{B})=P(\bar{B})-P(F\cap\bar{B})=0{,},08-0{,}014=0{,}066$

$$P_H(\bar{B})=\frac{0{,}066}{0{,}48}=0{,}1375$$

$P_H(\bar{B})$ = **0,138** arrondi au millième.

Partie B

L Le chef de rayon affirme que la probabilité d'un client choisi au hasard achète des produits bio au moins une fois par mois est : p=0,75.
On considère un échantillon de 2000 personnes choisies au hasard parmi les clients du magasin.
$n=2000\geqslant 30 \qquad np=1500\geqslant 5 \qquad n(1-p)=500\geqslant 5$.
Soit I un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %

$$I=\left[p-1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p+1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$I=\left[0{,}75-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}75\times 0{,}25}{2000}}\,;0{,}75+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}75\times 0{,}25}{2000}}\right]$$

$1{,}96\times\sqrt{\dfrac{0{,}75\times 0{,}25}{2000}}=0{,}019$ arrondi au millième.

$I=[0{,}731\,;0{,}769]$

La proportion constatée de consommateurs de produits bio au moins une fois par mois dans l'échantillon est : $f=\dfrac{1421}{2000}=0{,}711$.

f n'appartient pas à I.

Au seuil de 95 %, on peut conclure que l'affirmation du chef de rayon est fausse.

Partie C

1. f est définie sur [3;4] par $f(x)=\dfrac{2}{(x-2)^2}$

f est continue et positive sur [3;4].

$f(x)=2\times(x-2)^{-2} \qquad F(x)=2\times\dfrac{(x-2)^{-1}}{-1}=-2\times\dfrac{1}{x-2}$

F est une primitive de f sur [3;4].

$$\int_3^4 f(x)\,dx = F(4)-F(3)=-2\times\frac{1}{4-2}-\left(-2\times\frac{1}{3-2}\right)=-1+2=1$$

donc **f est une fonction de densité d'une loi de probabilité sur [3;4].**

2. La probabilité qu'un client gagne le panier est :

$$\int_{3,2}^{3,5} f(x)\,dx = F(3,5)-F(3,2)=-2\times\frac{1}{1,5}+2\times\frac{1}{1,2}=-\frac{4}{3}+2\times\frac{5}{6}=\frac{10}{6}-\frac{8}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Annonce : « un client sur trois gagne le panier ».

Cette annonce est exacte.

3.a. G est dérivable sur [3;4]

$$G'(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{(x-2)\times 1-1\times x}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)+2}{(x-2)^2}=\frac{x}{(x-2)^2}$$

G est une primitive de la fonction de la fonction g définie sur [3;4] par $g(x)=\frac{x}{(x-2)^2}$ sur cet intervalle.

3.b. $E(X)=\int_3^4 x\,f(x)\,dx$

$x\,f(x)=2g(x)$

$E(X)=2G(4)-2G(3)=2\ln(2)-2\times\frac{4}{2}-2\ln(1)+2\times\frac{3}{1}=2\ln(2)-4+6$ **$=2+2\ln(2)$**

$E(X)$ **= 3,39** au centième.

La masse moyenne d'un panier est 3,39 kg.