EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :
$z^3+(-2\sqrt{3}+2i)z^2+(4-4i\sqrt{3})z+8i=0$ (E).

1.a. Montrer que le nombre -2i est une solution de l'équation (E).

1.b. Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a :
$z^3+(-2\sqrt{3}+2i)z^2+(4-4i\sqrt{3})z+8i=(z+2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$.

1.c. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

1.d. Écrire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

Dans la suite on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

2. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2i$, $\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{3}-i$.

2.a. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

2.b. Placer ces points sur une figure que l'on complétera par la suite.

2.c. On donne D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_L , du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

3. On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives (x;y) et (x';y') sont orthogonaux si et seulement si xx'+yy'=0.

3.a. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\bar{z}'$ est un imaginaire pur.

3.b. À l'aide de la question 3.a. démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.

CORRECTION

1. (E) : $z^3+(-2\sqrt{3}+2\,i)z^2+(4-4\,i\sqrt{3})z+8\,i=0$

1.a. $i^2=-1$ $\qquad i^3=-i$

$(-2\,i)^2=-4$ $\qquad (-2\,i)^3=8\,i$

$8\,i+(-2\sqrt{3}+2\,i)\times(-4)+(4-4\,i\sqrt{3})\times(-2\,i)+8\,i=8\,i+8\sqrt{3}-8\,i-8\,i-8\sqrt{3}+8\,i=0$

donc -2i est une solution de l'équation (E).

1.b. $(z+2\,i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=z^3-2\sqrt{3}z^2+4\,z+2\,i\,z^2-4\sqrt{3}\,i\,z+8\,i$

$z^3+(-2\sqrt{3}+2\,i)z^2+(4-4\,i\sqrt{3})z+8\,i$

1.c. $z^3+(2\sqrt{3}+2\,i)z^2+(4-4\,i\sqrt{3})z+8\,i=0 \quad\Leftrightarrow\quad (z+2\,i=0 \text{ ou } z^2-2\sqrt{3}z+4=0)$

- $z+2\,i=0 \quad\Leftrightarrow\quad z=-2\,i$
- $z^2-2\sqrt{3}\,\mathrm{z}+4=0$

$\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times4=12-6=-4=(2\,i)^2$.

L'équation admet 2 solutions complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{2\sqrt{3}+2\,i}{2}=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\dfrac{2\sqrt{3}-2\,i}{2}=\sqrt{3}-i$

Les solutions de l'équation (E) sont : $-2\,i$, $\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{3}-i$.

1.d. $|-2\,i|=2 \qquad -i=e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad -2\,i=2\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$|\sqrt{3}+i|^2=3+1=4 \qquad |\sqrt{3}+i|=2$

$\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) \qquad \cos(\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha)=\dfrac{1}{2}$ donc $\alpha\equiv\dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$

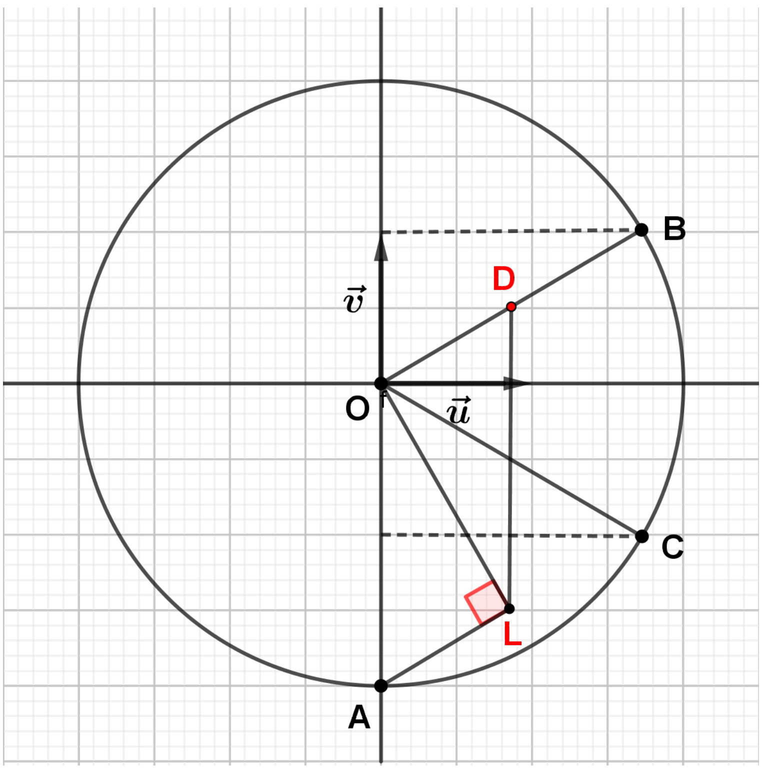
$\sqrt{3}+i=2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

De même $\sqrt{3}-i=2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

2.a. $A(-2\,i) \qquad B(\sqrt{3}+i) \qquad C(\sqrt{3}-i)$ OA=OB=OC=2.

Les points A, B et C appartiennent au cercle de centre o et de rayon 2.

2.c.



2.c. AODL est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{OA}(-2i)$ $\quad \overrightarrow{DL}(z_L-z_D)$

$z_D=\frac{z_0+z_B}{2}=\frac{0+\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$z_L-z_D=-2i \iff z_L=z_D-2i=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-2i=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$.

3.a. $z=x+iy \quad z'=x'+iy' \quad \bar{z}'=x'-iy'$

$z\bar{z}'=(x+iy)(x'-iy')=xx'-ixy'+ix'y+yy'=xx'+yy'+i(-xy'+yx')$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\iff xx'+yy'=0 \iff z\bar{z}'=i(-xy'+x'y) \iff z\bar{z}'$ est un imaginaire pur.

3.b. $\overrightarrow{LO}(-z_L)$ $\quad -z_L=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

$\overrightarrow{LA}(z_A-z_L)$ $\quad z_A-z_L=-2i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i \quad z'=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \quad \bar{z}'=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$z\bar{z}'=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i-\frac{3\sqrt{3}}{4}i-\frac{3}{4}=-\sqrt{3}i$

$z\bar{z}'$ est un imaginaire pur donc les vecteurs $\overrightarrow{LO}$ et $\overrightarrow{LA}$ sont orthogonaux et le triangle OLA est rectangle en L.