EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes, à coefficients entiers.

Soit $U=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{R}$. À U et V, on associe la matrice $A=\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & u_2 \end{pmatrix}$ et le nombre $d(A)=u_1 v_2 - u_2 v_1$.

On dit que (U,V) est une base de $\mathcal{R}$ si et seulement si, pour tout élément X de $\mathcal{R}$, il existe un unique couple d'entiers relatifs (a;b) tel que $X=aU+bV$.

1. Dans cette question, on pose $U=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1.a. Montrer que X ne peut pas s'écrire $X=aU+bV$, avec a et b entiers relatifs.

2.a. Le couple (U,V) est-il une base de $\mathcal{R}$?

Dans la suite de l'exercice, on souhaite illustrer sur un exemple la propriété : « si d(A)=1, alors (U,V) est une base de $\mathcal{R}$ ».

2. En posant $U=\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$ le but de cette question est de déterminer $V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tel que d(A)=1. On rappelle dans ce cas que la matrice A associée au couple (U,V) s'écrit : $A=\begin{pmatrix} 6 & v_1 \\ -11 & v_2 \end{pmatrix}$.

2.a. Exprimer la condition d(A)=1 par une égalité reliant v_1 et v_2.

2.b. On considère l'équation (E) : $11x+6y=1$, où x et y sont des entiers relatifs.
Donner une solution particulière de l'équation (E).

2.c. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des entiers relatifs.

2.d. Déterminer alors une matrice $V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{R}$ vérifiant d'une part l'égalité d(A)=1 et, d'autre part, la condition $0 \leqslant v_1 \leqslant 10$.

3. Dans cette question, on pose $U=\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$. Ainsi $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -11 & -9 \end{pmatrix}$.

3.a. Montrer que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

3.b. Soit X un élément de $\mathcal{R}$.
Montrer que l'égalité $X=aU+bV$ s'écrit matriciellement $X=A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

3.c. Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs (a;b) tel que $X=aU+bV$, c'est à dire tel que (U,V) est une base de $\mathcal{R}$.

3.d. Déterminer ce couple (a;b) lorsque $X=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

CORRECTION

1.a. $U=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $V=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$

$X=aU+bV \Leftrightarrow \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\2b\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+b\\a+2b\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}10=2a+b\\10=a+2b\end{cases}$

On obtient : $b=10-2a$ et $10=a+2\times(10-2a)=20-3a \Leftrightarrow 3a=10 \Leftrightarrow a=\frac{10}{3}$

et $b=10-\frac{20}{3}=\frac{10}{3}$

$\frac{10}{3}$ n'est pas un entier relatif donc il n'existe pas d'entiers relatifs a et b tels que $X=aU+bV$.

1;b. Le couple (U,V) n'est pas une base de $\mathscr{R}$ car il existe au moins un élément X de $\mathscr{R}$ qui ne s'écrit pas sous la forme $X=aU+bV$ avec a et b entiers relatifs.

2. $U=\begin{pmatrix}6\\-11\end{pmatrix}$ $V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}6 & v_1\\-11 & v_2\end{pmatrix}$

2.a. $d(A)=6v_2-(-11)v_1=6v_2+11v_1$

$d(A)=1 \Leftrightarrow 11v_1+6v_2=1$

2.b. Le couple (-1;2) est une solution particulière de l'équation (e) : $11x+6y=1$ car : $11\times(-1)+6\times2=-11+12=1$.

2.c. $11x+6y=1 \Leftrightarrow 11x+6y=11\times(-1)+6\times2 \Leftrightarrow 11x-11\times(-1)=-6y+6\times2$

$\Leftrightarrow 11(x+1)=6(-y+2)$

11 et 6 sont premiers entre eux, x et y sont des entiers relatifs.

6 divise 11(x+1) et 6 est premier avec 11, le théorème de Gauss nous permet d'affirmer que 6 divise x+1 donc il existe un entier relatif k tel que $x+1=6k \Leftrightarrow x=6k-1$.

Pour tout entier relatif k si $x+1=6k$ alors $11(x+1)=6(-y+2) \Leftrightarrow 11\times6k=6(-y+2)$

$\Leftrightarrow 11k=-y+2 \Leftrightarrow y=-11k+2$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $11x+6y=1$ dans l'ensemble des entiers relatifs est :

$\mathscr{S}=\{\ (6k-1;-11k+2)\ |\ k\in Z\ \}$.

2.d. $v_1=6k-1$ $\quad 0\leqslant v_1\leqslant 10 \Leftrightarrow 0\leqslant 6k-1\leqslant 10 \Leftrightarrow 1\leqslant 6k\leqslant 11 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\leqslant k\leqslant\frac{11}{6}$

Le seul entier relatif vérifiant cette double inégalité est $k=1$.

On obtient $v_1=5$ $\quad v_2=-9$ et $V=\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix}$.

3.a. On peut utiliser la calculatrice pour obtenir la matrice inverse de A.

On obtient : $A^{-1}=\begin{pmatrix}-9 & -5\\11 & 6\end{pmatrix}$.

. On peut aussi démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

On pose $B=\begin{pmatrix}e & g\\f & h\end{pmatrix}$ $\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}6 & 5\\-11 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e & g\\f & h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6e+5f & 6g+5h\\-11e+9f & -11g-9h\end{pmatrix}$.

$AB=I \Leftrightarrow \begin{cases}6e+5f=1\\-11e-9f=0\\6g+5h=0\\-11g-9h=1\end{cases}$

$\begin{cases} 66e+55f=11 \\ -66e-54f=0 \end{cases}$ donc $f=11$

$\begin{cases} 54e+45f=9 \\ -55e-45f=0 \end{cases}$ donc $-e=9$ soit $e=-9$

$\begin{cases} 66g+55h=0 \\ -66g-54h=6 \end{cases}$ donc $h=6$

$\begin{cases} 54g+45h=0 \\ -55g-45h=5 \end{cases}$ donc $-g=5$ soit $g=-5$

$B=\begin{pmatrix} -9 & -5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$

On vérifie que $BA=I$. A est inversible et $A^{-1}=B$.

3.b. X est un élément de $\mathscr{R}$

$aU+bV = a\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a \\ -11a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5b \\ -9b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a+5b \\ -11a-9b \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -11 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a+5b \\ -11a-9b \end{pmatrix}$

Donc $X=aU+bV=A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

3.c. Pour tout élément X de $\mathscr{R}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ x et y sont des entiers relatifs.

$X=A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}X=A^{-1}A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}X=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9x-5y \\ 11x+6y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-9x-5y \\ b=11x+6y \end{cases}$

a et b dont bien des entiers relatifs donc (U,V) est une de $\mathscr{R}$.

3.d. $X=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -18-15 \\ 22+18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -33 \\ 40 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-33 \\ b=40 \end{cases}$

Donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -33\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix} + 40\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$.

