EXERCICE 2 6 points

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation : $u_{n+1}=(n+1)u_n-1$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1=0$ alors $u_4=-17$.

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

```
Pour N allant de 1 à 12
    U ←
Fin Pour
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1=0{,}7$ puis pour $u_1=0{,}8$.
Voici les valeurs obtenues.

Pour u_1=0.7	Pour u_1=0.8
0.4	0.6
0.2	0.8
- 0.2	2.2
- 2	10
- 13	59
- 92	412
- 737	3295
- 6634	29654
- 66341	296539
-729752	3261928
- 8757025	39143135
- 113841126	508860754

Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1=0{,}7$? et si $u_1=0{,}8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx .$$

On rappelle que le nombre e est une valeur de la fonction exponentielle en 1. C'est à dire que $e=e^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle [0;1] par $F(x)=(-1-x)e^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle [0;1]de la fonction f définie sur l'intervalle [0;1] par $f(x)=xe^{1-x}$.

2. En déduire que $I_1=e-2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à , on a :

$$I_{n+1}=(n+1)I_n-1$$

Utiliser cette formule pour calculer I_2.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

4.a. Justifier que,pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1] et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e$.

4.b. Justifier que : $\int_0^1 x^n e \, dx = \frac{e}{n+1}$.

4.c. En déduire que,pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.

4.d. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n!$ le nombre défini, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par :
$1! = 1$
$2! = 2 \times 1$
et si $n \geqslant 3$ $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$
On a ainsi par exemple
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \times 2!$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \times 3!$
$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 8 \times 7!$
Et plus généralement :
$(n+1)! = (n+1) \times n!$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :
$u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$.
On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,on a :
$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ et $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

2. On admet que : $\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$

2.a. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0{,}7$.

2.b. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0{,}8$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1. $u_1=0$; $u_2=2\times u_1-1=2\times 0-1=-1$; $u_3=3\times u_2-1=3\times(-1)-1=-4$;
$u_4=4\times u_3-1=4\times(-4)-1=-17.$

2.

```
Pour N allant de 1 à 12
      U ← (N+1)U-1
Fin Pour
```

3. Pour $u_1=0{,}7$, on conjecture $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

. Pour $u_1=0{,}8$ on conjecture $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Partie B

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1], $F(x)=(-1-x)e^{1-x}$.
F est dérivable sur [0;1].
$(-1-x)'=-1$ et $(e^{1-x})'=-e^{1-x}$.
On dérive un produit.
$F'(x)=-1\times e^{1-x}+(-1-x)\times(-e^{1-x})=(-1+1+x)e^{1-x}=xe^{1-x}=f(x)$
donc F est une primitive de f sur [0;1].

2. $I_1=\int_0^1 xe^{1-x}dx=\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=-2e^0-(-e^{-1})=e-2.$

3. On admet que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à1, on a :
$I_{n+1}=(n+1)I_n-1$.
Pour n = 1 : $I_2=2I_1-1=2(e-2)-1=2e-5$.

4.a. Si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $0\geqslant -x\geqslant -1$ et $1\geqslant 1-x\geqslant 0$.
La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $0\leqslant 1-x\leqslant 1$ alors $e^0\leqslant e^{1-x}\leqslant e^1$ soit $0\leqslant 1\leqslant e^{1-x}\leqslant e$.
Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1 et pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0;1], on a : $0\leqslant x^n$.
Donc $0\leqslant x^n e^{1-x}\leqslant x^n e$

4.b. $\int_0^1 x^n e\,dx=e\int_0^1 x^n;dx$.
Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1 et pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1], on considère la fonction g_n définie par $g_n(x)=x^n$.

La fonction G_n définie sur [0;1] par $G_n(x)=\frac{x^n}{n+1}$ est une primitive de g_n .

Donc $\int_0^1 x^n dx=\int_0^1 g_n dx=G(1)-G(0)=\frac{1}{n+1}-\frac{0}{n+1}=\frac{1}{n+1}$

et $\int_0^1 x^n e\,dx=e\int_0^1 x^n dx=\frac{e}{n+1}$.

4.c. Pour tout nombre réel de l'intervalle [0;1] : $0\leqslant x^n e^{1-x}\leqslant x^n e$

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

En utilisant les propriétés de l'intégrale et de la relation d'ordre (conséquence de la positivité de l'intégrale) : $0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leqslant \int_0^1 x^n e\, dx$

Soit $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.

4.d. $\lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

En utilisant le théorème des gendarmes, on obtient : $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

Partie C

1. On veut montrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$.

Initialisation

Pour n = 1

$1!(u_1 - e + 2) + I_1 = u_1 - e + 2 + e - 2 = u_1$ car $I_1 = e - 2$

La propriété est vérifiée pour n = 1.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on suppose que $u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$ et on doit démontrer que $u_{n+1} = (n+1)!(u_1 - e + 2) + I_{n+1}$.

Or $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 = (n+1)[n!(u_1 - e + 2) + I_n] - 1 = (n+1)n!(n+1)I_n - 1 = (n+1)!(u_1 - e + 2) + I_{n+1}$.

car $(n+1)n! = (n+1)!$ et $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on a : $u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$.

2. On admet que $\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

On a 2,7 < e < 2,8 donc 0,7 < e < 0,8

2.a. si $u_1 = 0{,}7$ alors $u_1 - e + 2 < 0$ et $\lim_{n \to +\infty} n!(u_1 - e + 2) = -\infty$ d'autre part $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Conséquence :

$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

2.b. Si $u_1 = 0{,}8$ alors $u_1 - e + 2 > 0$ et $\lim_{n \to +\infty} n!(u_1 - e + 2) = +\infty$ d'autre part $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

Conséquence :

$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés