EXERCICE 3 — 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\frac{1}{z}$ soient alignés.
Sur le graphique donné en annexe, le point A a pour affixe 1.

Partie A : études d'exemples

1. Un premier exemple
Dans cette question on pose $z=i$.

1.a. Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

1.b. Placer les points N_1 d'affixe z^2, et P_1 d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
On remarque que les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. Une équation

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2+z+1=0$.

2. Un deuxième exemple
Dans cette question, on pose : $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.a. Déterminer la forme exponentielle de z, puis celles des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

2.b. Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2 d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
On remarque que dans, ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.
On note N le point d'affixe z^2 et P le d'affixe $\frac{1}{z}$.

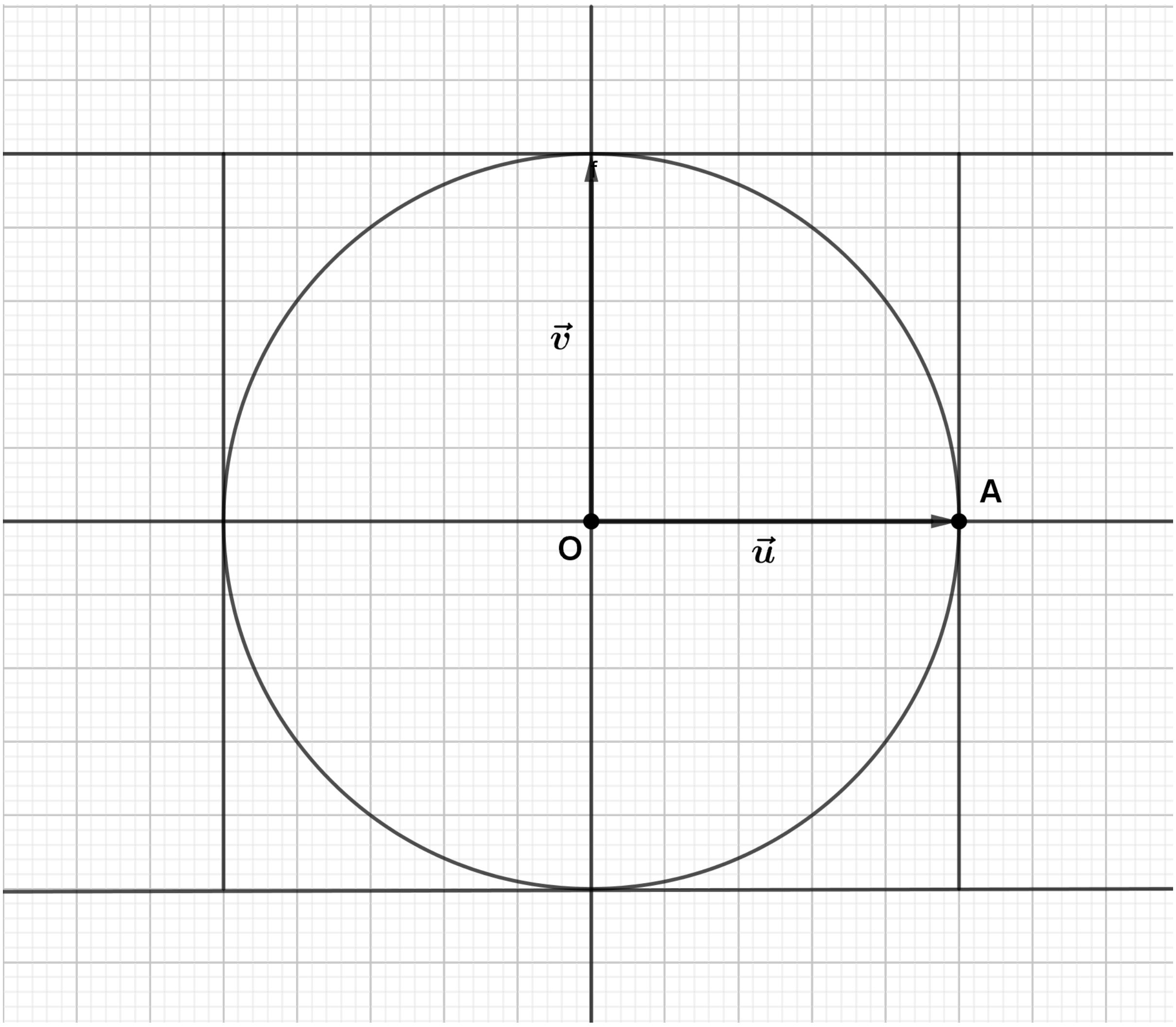
1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :
$z^2-\frac{1}{z}=(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right)$.

2. On rappelle que si, $\vec{U}$ est un vecteur non nul et $\vec{V}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\vec{U}}$ et $z_{\vec{V}}$, les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\vec{V}}=k\,z_{\vec{U}}$.
En déduire que, pour $z\neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si z^2+z+1 est un réel.

3. On pose $z=x+iy$, où x et y désignent des nombres réels.
Justifier que $z^2+z+1=x^2-y^2+x+1+i(2xy+y)$.

4.a. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z\neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.
4.b. Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

ANNEXE (à rendre avec la copie)



CORRECTION

1. $z=\mathrm{i}$

1.a. $z^2=\mathrm{i}^2=-1$ et $\frac{1}{z}=\frac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$

1.b. $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{N}_1(-1)$ et $\mathrm{P}_1(-\mathrm{i})$.

On place ces points sur la figure donnée en annexe.

2. $z^2+z+1=0$

$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=3\mathrm{i}^2=(\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$z_1=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad z_2=\overline{z_1}=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{S}=\{z_1;z_2\}$

3. $z=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.a. $|z|^2=\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1 \qquad |z|=1$

Si α est un argument de z alors $\cos(\alpha)=-\frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\alpha\equiv\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \qquad z^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} \qquad \frac{1}{z}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

3.b. $-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-2\pi$ donc $\mathrm{N}_2=\mathrm{P}_2$ et les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

On place ces points sur la figure donnée en annexe.

Partie B

1. $z\neq0$

$(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right)=z^2+z+1-z-1-\frac{1}{z}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}$

2. $\vec{\mathrm{U}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\left(1-\frac{1}{z}\right) \qquad \vec{\mathrm{V}}=\overrightarrow{\mathrm{PN}}\left(z^2-\frac{1}{z}\right)$

$z_{\vec{\mathrm{V}}}=(z^2+z+1)z_{\vec{\mathrm{U}}}$

donc les points A, N et P sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ sont colinéaires donc si et seulement si z^2+z+1 est un nombre réel.

3. $z=x+\mathrm{i}y \qquad z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2+2\mathrm{i}xy-y^2$

$z^2+z+1=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy+x+\mathrm{i}y+1=x^2-y^2+x+1+\mathrm{i}(2xy+y)$

4.a. Les points A, n et P sont alignés si et seulement si $z\neq0$ **et** $2xy+y=0$.

$2xy+y=0 \iff y(2x+1)=0 \iff (x=0 \text{ ou } 2x+1=0) \iff \left(x=0 \text{ ou } x=-\frac{1}{2}\right)$

L'ensemble cherché est la réunion de l'axe des abscisses privé de l'origine car (car $z\neq0$)

et de la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$.

4.b. On complète la figure donnée en annexe ;

ANNEXE