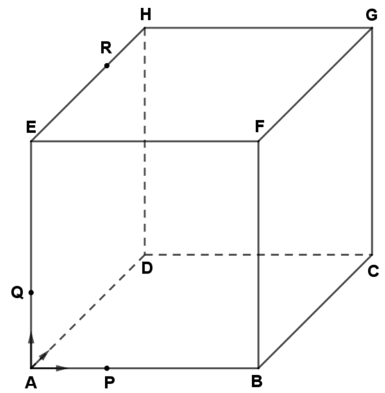
EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans l'espace,on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.

Les points P, Q et R sont définis par : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$.



Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $(A;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ avec : $\vec{i}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$.

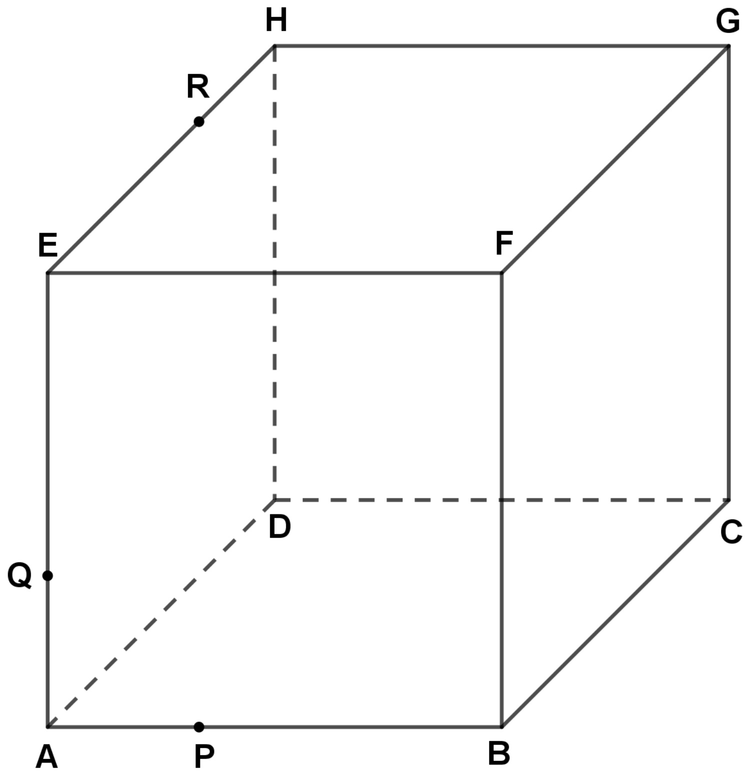
Dans ce repère, on a par exemple : B(6;0;0), F(6;0;6) et R(0;4;6).

1.a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω .
1.b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}(1;b;c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR).
1.c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x-y+z-2=0$.

2.a. On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant le point Ω , centre du cube.
Donner une représentation paramétrique de la droite Δ .
2.b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point de coordonnées $\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{8}{3}\right)$.
2.c. Calculer la distance ΩI .

3. On considère les points $J(6;4;0)$ et $K(6;6;2)$.
3.a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).
3.b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.
3.c. Sur la figure donnée en annexe, tracer la section du cube par le plan (PQR).
On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.

ANNEXE (à rendre avec la copie)



CORRECTION

1.a. $P(2;0;0)$; $Q(0;0;2)$; Ω (3;3;3)

1.b. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (PQR) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR).
Par exemple $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR).

$P(2;0;0)$; $Q(0;0;2)$; $R(0;4;6)$; $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$; $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ}.\vec{n}=-2\times1+0+b+2\times c=-2+2c$
$\overrightarrow{PR}.\vec{n}=-2\times1+4\times b+6\times c=-2+4b+6c$

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (PQR) $\Leftrightarrow \begin{cases}-2+2c=0\\-2+4b+6c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=1\\b=-1\end{cases}$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1.c. $M(x;y;z)$ appartient au plan (PQR) si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{PM}=0$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{PM}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1\times(x-2)-1\times y+1\times z=2 \quad\Leftrightarrow\quad x-y+z-2=0$

2.a. Δ est perpendiculaire au plan (PQR) donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ.
Δ est la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par le point Ω (3;3;3).

$$\Delta : \begin{cases}x=1\times t+3\\y=-1\times t+3\\z=1\times t+3\end{cases} \quad t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

2.b. Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de Δ et (PQR), on résout le système :

$$\begin{cases}x-y+z-2=0\\x=t+3\\y=t+3\\z=t+3\end{cases}$$

On obtient $(t+3)-(-t+3)+(t+3)-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3t+1+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=-\frac{1}{3}$.

$x=-\frac{1}{3}+3=\frac{8}{3} \qquad y=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3} \qquad z=-\frac{1}{3}+3=\frac{8}{3}$.

I est le point d'intersection de Δ et (PQR) donc $I\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{8}{3}\right)$

2.c. $\overrightarrow{\Omega I}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

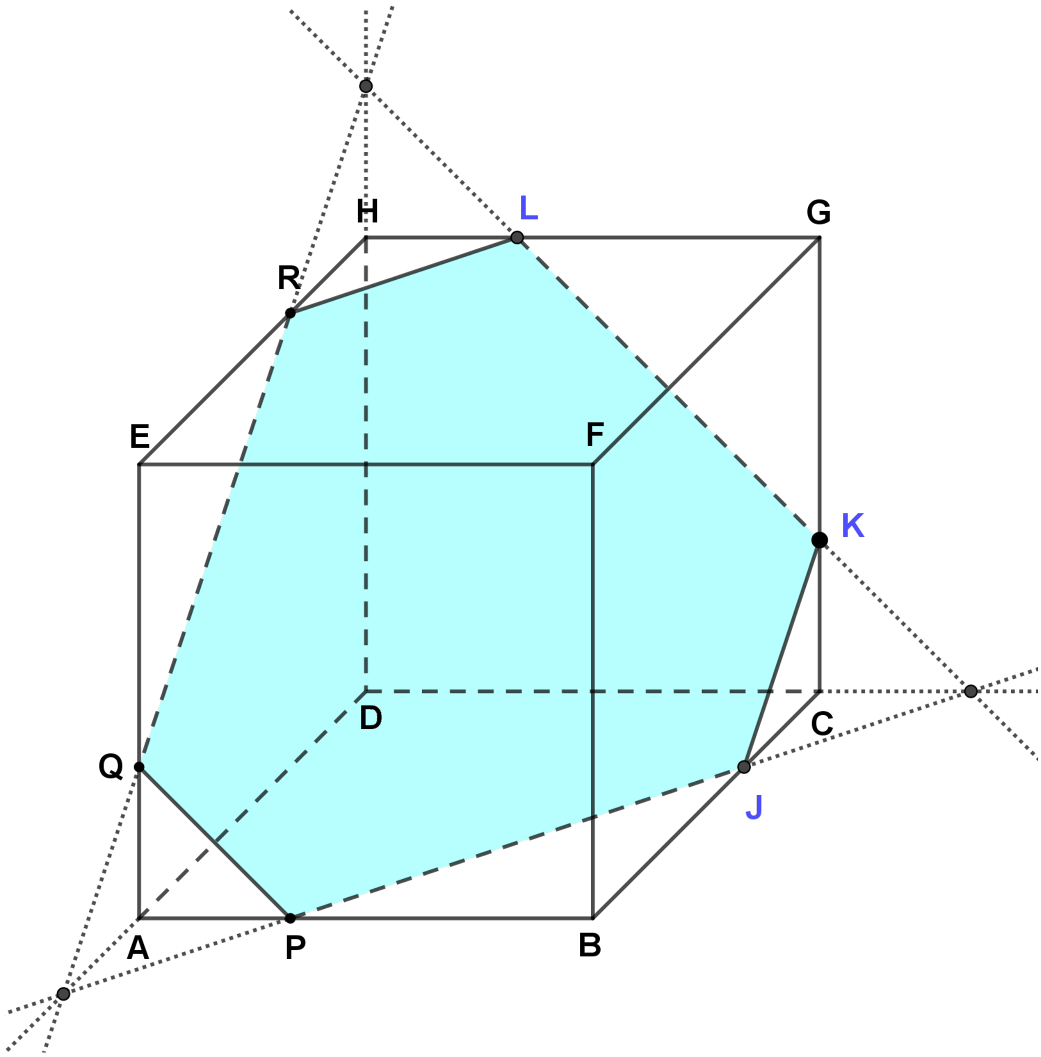
$\Omega I^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9} \qquad \Omega I=\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.a. J(6;4;0) (PQR) : x-y+z-2 = 0
6-4+0-2=0 donc J appartient au plan (PQR).
K(6;6;2)
6-6+2-2=0 donc K appartient au plan (PQR).

3.b. $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QR}=2\overrightarrow{JK}$ donc les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

3.c. On construit la section du cube ABCDEFGH par le plan (PQR) sur la figure donnée en annexe.



<u>Remarque</u>

On peut aussi justifier (par le calcul) que J appartient à l'arête [BC] et que K appartient à l'arête [CG] et que L est l'intersection de l'arête [GH] et de la droite parallèle à (QP) passant par K.

On peut vérifier que L(2;6;6).