EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Le but de cet exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40.

Partie A :

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes

1. Sans justifier, donner deux nombres premiers x et y tes que 40=x+y.

2. On considère l'équation $20x+19y=40$ où x et y désignent deux entiers relatifs.
Résoudre cette équation.

3. Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque : $40=2^2+6^2$. On veut savoir si 40, est aussi différence de deux carrés, autrement dit s'intéresser à l'équation $x^2-y^2=40$, où x et y désignent deux entiers naturels.
3.a. Donner la décomposition de 40 en produit de facteurs premiers.
3.b. Montrer que, si x et y désignent des entiers naturels, les nombres $x-y$ et $x+y$ ont la même parité.
3.c. Déterminer toutes les solutions de l'équation $x^2-y^2=40$ où x et y désignent deux entiers naturels.

Partie B : « sommes » de cubes

Les questions 1. et 2.sont indépendantes.

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels.
Par exemple :

$$13=4^3+7^3+7^3-9^3-2^3$$
$$13=-1^3-1^3-1^3+2^3+2^3$$
$$13=1^3+7^3+10^3-11^3$$

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « sommes » de cubes à la place de « sommes ou différences de cubes d'entiers naturels ».
Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en « somme » de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en « somme » de 4 cubes.

1.a. En utilisant l'égalité $13=1^3+7^3+10^3-11^3$, donner une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes.
1.b. On admet que pour tout entier naturel n, on a : $6n=(n+1)^3+(n-1)^3-n^3-n^3$
En déduire une décomposition de 48 en « somme » de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes, différente de celle donnée en 1.a.

2. Le nombre 40 est une « somme » de 4 cubes : $40=4^3-2^3-2^3-2^3$.
On veut savoir si 40 peut être décomposé en « somme » de 3 cubes.
2.a. Recopier et compléter sans justifier :

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la diviision euclidienne de n^3 par 9					1				

2.b. On déduit du tableau précédent que, pour tout entier naturel n, l'entier naturel n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1 soit à -1.
Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en « somme » de 3 cubes.

CORRECTION

Partie A

1. **40 = 3 + 37** 3 et 37 sont des nombres premiers.
(on peut aussi écrire : 40 = 17 + 23 ou 40 = 11 + 29).

2. $20x+19y=40$
20 et 19 sont des nombres premiers entre eux et le couple (1;-1) est une solution particulière de l'équation $20x+19y=1$ car $20\times1+19\times(-1)=1$.
Le couple (40;-40) est donc une solution particulière de l'équation $20x+19y=40$.
$20x+19y=40 \Leftrightarrow 20x+19y=20\times40+19\times(-40) \Leftrightarrow 20(x-40)=19(-y-40)$.
19 est premier avec 20 et 19 divise 20(x-40).
Le théorème de Gauss nous permet d'affirmer que 19 divise (x-40) donc il existe un entier relatif k tel que $x-40=19k$.
Pour tout entier relatif k, si $x-40=19k$ alors :
$20(x-40)=19(-y-40) \Leftrightarrow 20\times19k=19(-y-40) \Leftrightarrow 20k=-y-40$

$$20x+19y=40 \Leftrightarrow \begin{cases} x=19k+40 \\ y=-20k-40 \end{cases} \quad k\in Z$$

L'ensemble des solutions de l'équation $20x+19y=40$ est **S={ (19k+40; -20k-40) $k\in Z$ }.**

3. $40=2^2+6^2$
x et y sont des entiers naturels et $x^2-y^2=40$.

3.a. $40=2^3\times5$.

3.b. x + y = x – y + 2y
Si x – y est pair alors x – y + 2y est pair et x + y est pair.
Si x – y est impair alors x – y + 2y est impair et x + y est impair.
Conséquence
x – y et x + y sont de même parité.

3.c. $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=40=2^3\times5$
x et y sont des entiers naturels donc $x-y\leqslant x+y$.
Or $40=1\times40=2\times20=4\times10=5\times8$
x – y et x + y sont de même parité.
On ne peut avoir : (x – y = 2 et x + y = 20) ou (x – y = 4 et x + y = 10).

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$$

S={ (4;10) ; (7 ; 3) }

Partie B

1.a. $13=1^3+7^3+10^3-11^3$.
Or $40=13+27$ et $27=3^3$
donc $40=1^3+3^3+7^3+10^3-11^3$

1.b. Pour tout entier naturel n, on a :
$6n=(n+1)^3+(n-1)^3-n^3-n^3$
$48=6\times8$ donc pour n = 8
$48=9^3+7^3-8^3-8^3$
On a $40=48-8=48-2^3$
$40=9^3+7^3-8^3-8^3-2^3$

2.a.

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la diviision euclidienne de n^3 par 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

2.b. $8 \equiv -1 \quad (9)$

Donc pour tout entier naturel n, n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à -1.
On peut facilement vérifier que la somme de trois cubes est congrue à un entier compris entre -3 et 3 c'est à dire à dire que le reste de la division euclidienne par 9 de la somme de trois cubes est égal : soit à 0 ; soit à 1 ; soit à 2 ; soit à 3 ; soit à 6 ; soit à 7 ; soit à 8.
$40 = 9 \times 4 + 4$ donc le reste de la division euclidienne de 40 par 9 est 4.

<u>conclusion</u>

40 ne peut pas être décomposé en « somme » de 3 cubes.