EXERCICE 1 5 points

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O;I;J).

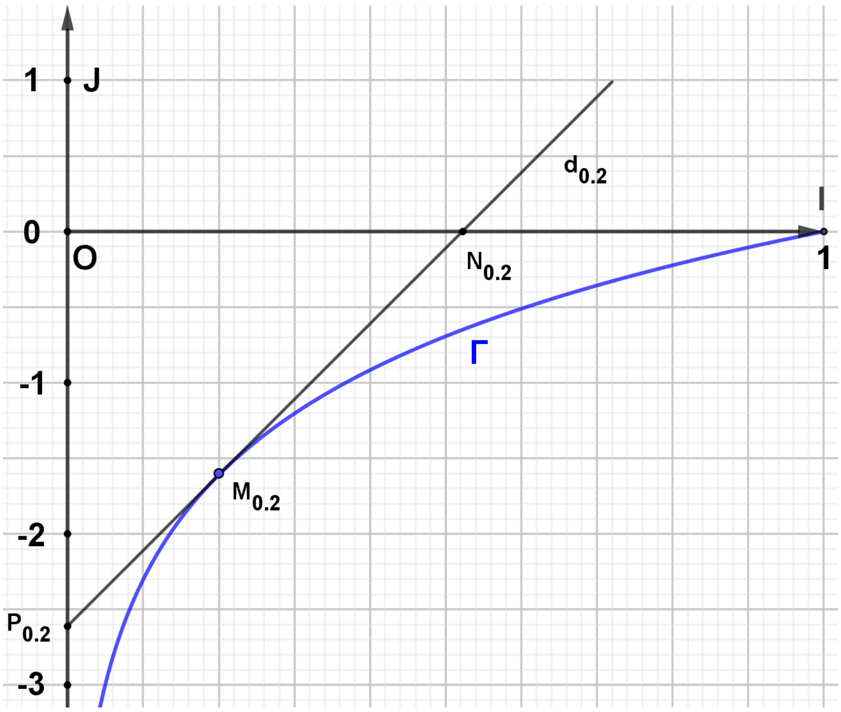
1. On considère la fonction f définie sur]0;1] par : $f(x)=x(1-\ln(x))^2$.

1.a. Déterminer une expression de la fonction dérivée f et vérifier que pour tout $x\in]0;1]$
$f'(x)=(\ln(x)-1)(\ln(x)+1)$.

1.b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle]0;1]
(on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle]0;1] par $g(x)=\ln(x)$.
Soit a un réel de l'intervalle]0;1]. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a . Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .
On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle]0;1].

2. Dans cette question , on étudie le cas particulier où a = 0,2 et on donne la figure ci-dessous.



2.a. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

2.b. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

2.c. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que , pour tout réel a de l'intervalle]0;1], l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a)=\frac{1}{2}a(1-\ln(a))^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale.
Déterminer cette aire maximale.

CORRECTION

1.a. f est dérivable sur]0;1].

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad ((1-\ln(x))^2)' = 2(1-\ln(x)) \times \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 1 \times (1-\ln(x))^2 + x \times 2(1-\ln(x)) \times \left(-\frac{1}{x}\right) = (1-\ln(x))^2 - 2(1-\ln(x))$$

$$f'(x) = (1-\ln(x))(1-\ln(x)-2) = (1-\ln(x))(-1-\ln(x)) = (\ln(x)-1)(\ln(x)+1)$$

1.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle]0;1], $\ln(x) \leqslant 0$ donc $\ln(x)-1<0$ et $\ln(x)+1 \geqslant 0$ $\Leftrightarrow$ $\ln(x) \geqslant -1$ $\Leftrightarrow$ $x \geqslant e^{-1}$

Tableau de variations de f

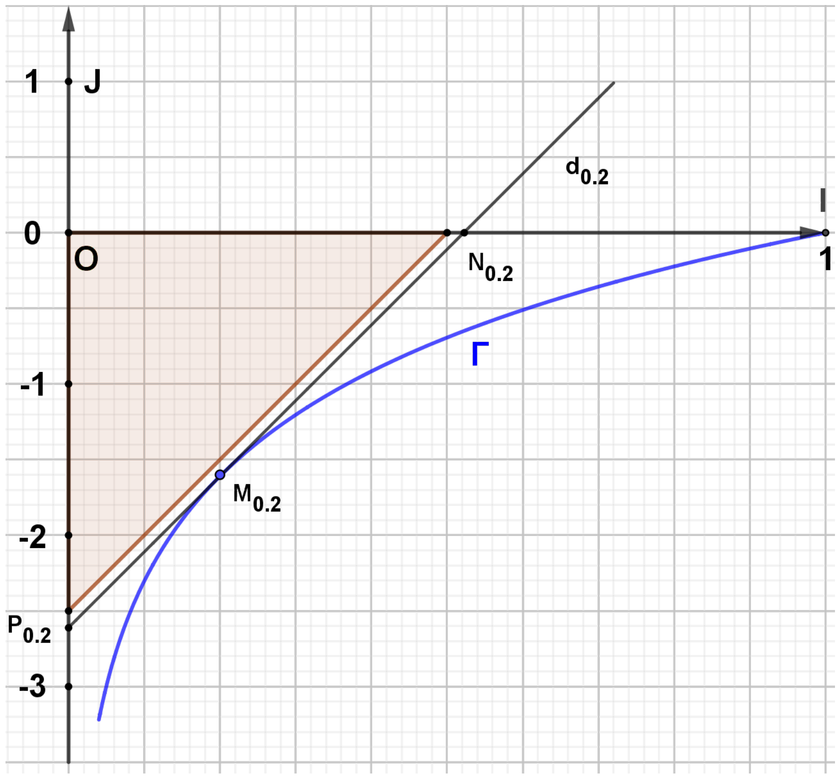
x	0		e^{-1}		1
ln(x)-1			–		
ln(x)+1		–	0	+	
f '(x)		+	0	–	
f(x)	0	↗	$4e^{-1}$	↘	1

On admet que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

$f(1) = 1 \times (1-\ln(1))^2 = 1$ car ln(1)=0.

$f(e^{-1}) = e^{-1}(1-\ln(e^{-1}))^2 = e^{-1}(1+1)^2 = 4e^{-1}$

2.a. Pour déterminer graphiquement une estimation de l'aire en U.A. du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$, on détermine le nombre de carrés d'aire 0,1x0,5=0,05 U.A. contenu dans le triangle..



Si on choisit une estimation donnant une valeur inférieure à l'aire demandée, on peut compter dix carrés et cinq demi carrés.
L'estimation de l'aire en U.A. est alors $0{,}05\times 12{,}5$ = **0,625 U.A.**

2.b. $g(x)=\ln(x)$ pour tout nombre réel de l'intervalle]0;1].
$g(0{,}2)=\ln(0{,}2)$
$g'(x)=\dfrac{1}{x}$ donc $g'(0{,}2)=\dfrac{1}{0{,}2}=5$
Une équation de $d_{0,2}$ est : $y-\ln(0{,}2)=5(x-0{,}2) \Leftrightarrow y=5x-1+\ln(0{,}2)$
$d_{0,2}$ **: y=5x-1+ln(0,2)**

2.c. L'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ est : $\mathscr{A}(0{,}2)=\dfrac{ON_{0,2}\times OP_{0,2}}{2}$

- Pour y=0 $\quad 5x=1-\ln(0{,}2) \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\ln(0{,}2)}{5}$
  $N_{0,2}\left(\dfrac{1-\ln(0{,}2)}{5};0\right) \qquad ON_{0,2}=\dfrac{1-\ln(0{,}2)}{5}$ car $\ln(0{,}2)<0$
- Pour x=0 $\quad y=-1-\ln(0{,}2)$
  $P_{0,2}(0;-1+\ln(0{,}2)) \qquad OP_{0,2}=|-1+\ln(0{,}2)|=1-\ln(0{,}2)$
- $\mathscr{A}(0{,}2)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\ln(0{,}2)}{5}\right)(1-\ln(0{,}2))=\dfrac{(1-\ln(0{,}2))^2}{10}$

En utilisant la calculatrice on obtient 0,681 pour valeur approchée.

3. $\mathscr{A}(a)=\dfrac{1}{2}f(a)$

$\dfrac{1}{2}>0$ donc les fonctions $\mathscr{A}$ et f ont les mêmes variations et $\mathscr{A}$ est maximale pour $a=e^{-1}$.

$\mathscr{A}(e^{-1})=\dfrac{1}{2}f(e^{-1})=2e^{-1}$ = 0,736 à 10^{-3} près.