EXERCICE 2 — 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct de O et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=-\frac{1}{z}$.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=-1+i$ et $z_B=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1.a. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A' image du point A par la fonction f.
1.b. Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B' image du point B par la fonction f.
1.c. Sur la copie, placer les points A, B, A' et B' dans le repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Pour les points B et B', on laissera les traits de construction apparents.

2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z=re^{i\theta}$.

2.a. Montrer que $z'=\frac{1}{r}e^{i(\pi-\theta)}$
2.b. Est-il vrai que si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

3. Soit le cercle Γ de de centre K d'affixe $z_K=-\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

3.a. Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2+x+y^2=0$.
3.b. soit $z=x+iy$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.
3.c. Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x=1$.

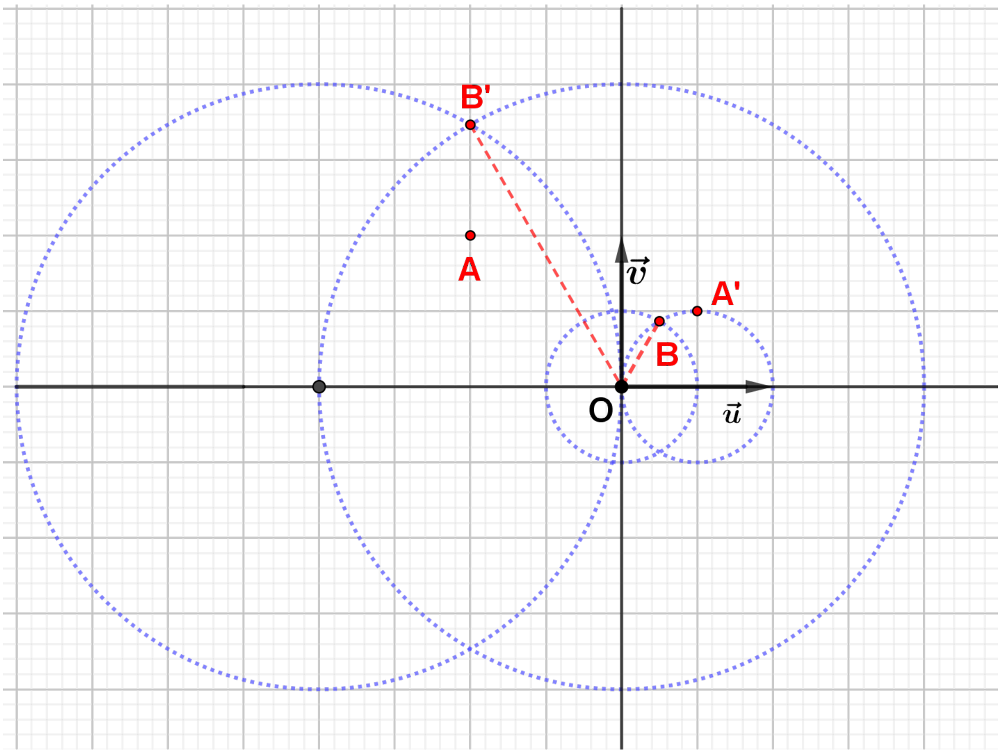
CORRECTION

1. A d'affixe $z_A=-1+i$ B d'affixe $z_B=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1.a. $z_{A'}=-\frac{1}{z_A}=-\frac{1}{-1+i}=-\frac{-1-i}{1+1}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

1.b. $z_{B'}=-\frac{1}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}=-2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

1.c.



2. $z=re^{i\theta}$

2.a. $z'=-\frac{1}{re^{i\theta}}=-\frac{1}{r}e^{-i\theta}$

Or $-1=e^{i\pi}$

$z'=e^{i\pi}\frac{1}{r}e^{-i\theta}=\frac{1}{r}e^{i(\pi-\theta)}$

2.b. Propriété VRAIE

Le point M, distinct du point O, appartient au disque de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ sans appartenir au cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ si et seulement si $0<|z_M|<1$.

Or $|z_M|=r$ et $|z'|=\left|-\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ et $|z_{M'}|=\frac{1}{r}$.

Si $0<|z_M|<1$ alors $|z_{M'}|=\frac{1}{|z_M|}>1$.

Conséquence :

M' est un point extérieur au disque de centre O et de rayon 1.

3.a. K est la point d'affixe $z_K=-\frac{1}{2}$.

M est le point d'affixe $z=x+iy$, x et y sont des nombres réels.

M appartient au cercle Γ de centre K et de rayon $\frac{1}{2}$ si et seulement si $KM=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $KM^2=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow$ $|z_M-z_K|^2=\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$ $x^2+x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$ $x^2+x+y^2=0$

Conclusion :

$x^2+x+y^2=0$ **est une équation cartésienne du cercle Γ .**

3.b. $z=x+\mathrm{i}\,y$ avec $x^2+y^2\neq 0$

$$z'=-\frac{1}{z}=-\frac{1}{x+\mathrm{i}\,y}=-\frac{x-\mathrm{i}\,y}{x^2+y^2}=\frac{-x+\mathrm{i}\,y}{x^2+y^2}=\frac{-x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$$

3.c. M, distinct de O, appartient à Γ si et seulement si $x^2+x+y^2=0$ et $x\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2=-x$ et $x\neq 0$

donc $z'=\frac{-x}{-x}+\mathrm{i}\frac{y}{-x}=1-\mathrm{i}\frac{y}{x}$ et l'abscisse du point M' est égale à 1.

Conclusion :

M' appartient à la droite d'équation x = 1.