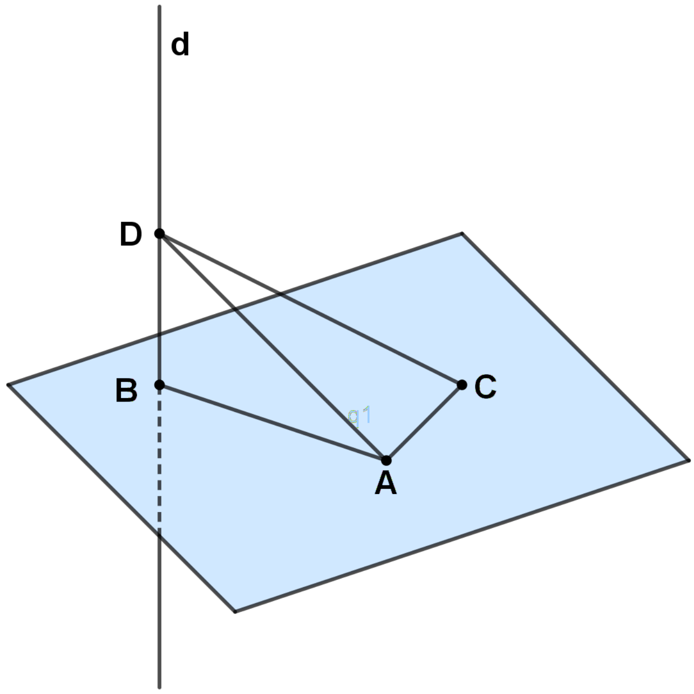
EXERCICE 3 — 6 points

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoin.

3.a. Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.
3.b. On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que I est équidistant des quatre sommets du bicoin ABCD.

Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point $A(3;1;-5)$ et la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+9 \\ z=t-3 \end{cases}$ où t décrit $\mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d passant par le point A.

2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point $B(5;5;-1)$.

3. Justifier que le point $C(7;3;-9)$ appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

4.a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.
4.b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2-4t=0$.
4.c. En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

On donne le point $D(9;1;1)$ qui est un des deux points solutions de la question **4.c.** de la partie B.
Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.
En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

CORRECTION

Partie A

1. P=(ABC)

d est une droite orthogonale au plan P donc d est orthogonale à toute droite contenue dans le plan P et d=(BD) et (AC) sont orthogonales.

Le triangle ABC est rectangle en A donc les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

La droite (AC) est orthogonales à deux droites sécantes (AB) et (BD) du plan (ABD) donc **la droite (AC) est orthogonale au plan (ABD).**

2. On considère le tétraèdre ABCD.

. ABC est un triangle rectangle en A.

. d est orthogonale au plan P=(ABC) donc d est orthogonale à (BA) et à (BC) et les triangles ABD et CBD sont rectangles en B.

. (AC) est orthogonale au plan (BAD) donc (AC) est orthogonale à (DA) et le triangle DAC est rectangle en A.

Conclusion :

Les quatre faces du tétraèdre ABCD sont des triangles rectangles donc **le tétraèdre ABCD est un bicoin.**

3.a. ABC est un triangle rectangle en A donc $AB < BC$ et $AC < BC$.

. BAD est un triangle rectangle en B donc $AB < AD$ et $BD < AD$.

. BCD est un triangle rectangle en B donc $BC < CD$ et $BD < CD$.

. ACD est un triangle rectangle en A donc $AD < CD$ et $AC < CD$.

Conséquences :

. $AD < CD$

. $AB < BC < CD$

. $AC < BC < CD$

. $BD < CD$

. $BC < CD$

Donc l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.

3.b. I est le milieu de l'arête [CD] et le triangle BCD est rectangle en B donc $IB=IC=ID$ et le triangle ACD est rectangle en A donc $IA=IC=ID$.

Conclusion :

$IA=IB=IC=ID$ et **le point I est équidistant des quatre sommets du bicoin ABCD.**

Partie B

1. d : $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+9 \\ z=t-3 \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$ $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d donc un vecteur normal à P.

$M(x;y;z)$ appartient au plan P $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

$A(3;1;-5)$ $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z+5 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $2(x-3)-2(y-1)+1(z+5)=0$ $\Leftrightarrow$ $2x-2y+z-6+2+5=0$ $\Leftrightarrow$ $2x-2y+z+1=0$

P : 2x-2y+z+1 = 0

2. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de P et d, on résout le système :

$$\begin{cases} 2x-2y+z+1=0 \\ x=2t+1 \\ y=-2t+1 \\ z=t-3 \end{cases}$$

On obtient : $2(2t+1)-2(-2t+9)+t-3+1=0 \Leftrightarrow 4t+2+4t-18+t-3+1=0$

$\Leftrightarrow 9t-18=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{18}{9}=2$.

Donc $x=2\times 2+1=5$, $y=-2\times 2+9=5$ et $z=2-3=-1$.

Le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B(5;5;-1).

3. C(7;3;-9)

$2\times 7-2\times 3-9+1=14-6-8=0$ donc le point C appartient au plan P.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-3\\5-1\\-1+5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7-3\\3-1\\-9+5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\times 44\times 2+4\times(-4)=8+8-16=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est rectangle en A.

$AB^2=2^2+4^2+4^2=36$ $AC^2=4^2+2^2+(-4)^2=36$ et $AB=AC=\sqrt{36}=6$.

Conclusion :

Le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

4.a. $t\neq 2$ donc $M\neq B$ et d=(MB) est orthogonale au plan P et (AB) est contenue dans le plan P donc les droites (AB) et (BM) sont orthogonales.

Conclusion :

Le triangle ABM est rectangle en B.

4.b. M(2t+1;-2t+9;t-3) B(5;5;-1) C(7;3;-9)

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}2t+1-5\\-2t+9-5\\t-3-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}2t-4\\-2t+4\\t-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}3-5\\1-5\\-5+1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix}$

$BM^2=(2t-4)^2+(-2t+4)^2+(t-2)^2=4t^2-16t+16+4t^2-16t+16+t^2-4t+4=9t^2-36t+36$

$BA^2=(-2)^2+(-4)^2+(-4)^2=36$

Le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si $BM^2=BA^2 \Leftrightarrow 9t^2-36t+36=36$

$\Leftrightarrow 9t^2-36t=0 \Leftrightarrow t^2-4t=0$.

4.c. $t^2-4t=0 \Leftrightarrow t(t-4)=0 \Leftrightarrow$ (t=0 ou t=4)

. Pour t=0 on obtient x=1, y=9 et z=-3 $M_1(1;9;-3)$.

. Pour t=4 on obtient $x=2\times 4+1=9$, $y=-2\times 4+9=1$ et $z\ 4-3=1$ $M_2(9;1;1)$

Les triangles ABM_1 et ABM_2 sont rectangles isocèles en B.

Partie C

$D=M_2(9;1;1)$ et $C(7;3;-9)$

I est le milieu de [DC]

$x_I=\dfrac{9+7}{2}=8$ $y_I=\dfrac{1+3}{2}=2$ et $z_I=\dfrac{1-9}{2}=-4$ $I(8;2;-4)$

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}8-3\\2-1\\-4+5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$ $AI^2=5^2+1^2+1^2=27$ $AI=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

On a : $AI=BI=CI=DI=3\sqrt{3}$.

Conclusion :

Les quatre sommets du tétraèdre ABCD appartiennent à la sphère de centre I et de rayon $3\sqrt{3}$.