EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes.

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles de verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide..
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

. à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
. si un client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
. si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier la $n^{\text{ième}}$ semaine ».

1.a. Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les événements R_1 et R_2.

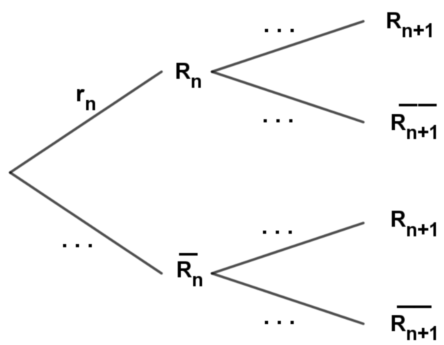
1.b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

1.c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.

1.d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier la $n^{\text{ième}}$ semaine. On a alors $r_n = P(R_n)$.

2.a. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



2.b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0{,}75\, r_n + 0{,}2$.

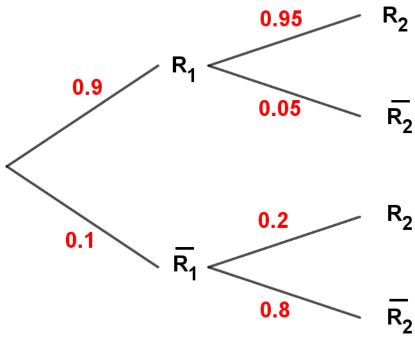
2.c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8$.

2.d. Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1.a. L'énoncé précise :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son paner est 0,9, donc $P(R_1)=0{,}9$ et $P(\bar{R}_1)=1-0{,}9=0{,}1$;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95, donc $P_{R_1}(R_2)=0{,}95$ et $P_{R_1}(\bar{R}_2)=1-0{,}95=0{,}05$;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2 donc $P_{\bar{R}_1}(R_2)=0{,}2$ et $P_{\bar{R}_1}(\bar{R}_2)=1-0{,}2=0{,}8$.
- On obtient l'arbre pondéré :



1.b. $P(R_1\cap R_2)=P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)=0{,}9\times 0{,}95$ = **0,855.**

1.c. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :

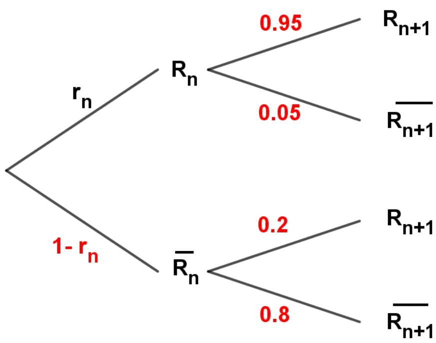
$P(R_2)=P(R_1\cap R_2)+P(\bar{R}_1\cap R_2)=P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)+P(\bar{R}_1)\times P_{\bar{R}_1}(R_2) = 0{,}9\times 0{,}95+0{,}1\times 0{,}2=0{,}855+0{,}02$

$P(R_2)$ = **0,875.**

1.d. On nous demande de calculer $P_{R_2}(\bar{R}_1)$

$P_{R_2}(\bar{R}_1)=\dfrac{P(\bar{R}_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\dfrac{0{,}02}{0{,}875}$ = **0,023 à 10^{-3} près.**

2.a.



2.b. $r_{n+1}=P(R_{n+1})=P(R_n\cap R_{n+1})+P(\bar{R}_n\cap R_{n+1})=P(R_n)\times P_{R_n}(R_{n+1})+P(\bar{R}_n)\times P_{\bar{R}_n}(R_{n+1})$

$r_{n+1}=r_n\times 0{,}95+(1-r_n)\times 0{,}2=0{,}95\,r_n+0{,}2-0{,}2\,r_n$

$r_{n+1}=0{,}75\,r_n+0{,}2$

2.c. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $r_n=0{,}1\times 0{,}75^{n-1}+0{,}8$.

- Initialisation

  $r_1=0{,}9$ et $0{,}1\times 0{,}75^0+0{,}8=0{,}1+0{,}8=0{,}9$

  La propriété est donc vérifiée pour $n = 1$
- Hérédité

  Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n non nul, on suppose que : $r_n=0{,}1\times 0{,}75^{n-1}+0{,}8$ et on doit démontrer que $r_{n+1}=0{,}1\times 0{,}75^n+0{,}8$.

Or $r_{n+1}=0,75\,r_n+0,2=0,75(0,1\times 0,75^{n-1}+0,8)+0,2=0,1\times 0,75^n+0,75\times 0,8+0,2=0,1\times 0,75^n+0,6+0,2$

$r_{n+1}=0,1\times 0,75^n+0,8$.

. Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affiermer que pour tout entier n non nul, $r_n=0,1\times 0,75^{n-1}+0,8$.

2.d. $0 < 0,75 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0,75^{n-1}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} r_n=0,8$.

À long terme 80 % des clients rapporteront chaque semaine la bouteille du panier de la semaine précédente.