## EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi qu'une réserve filtrante R.
Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau.
Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

. dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
. ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
. enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.
On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ ; plus précisément pour tout entier naturel n, on note $a_n$ et $b_n$ les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures ; On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont à priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout entier naturel n, on note $U_n$ la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**1.** Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**2.** On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**2.a.** Calculer $P^2$. En déduire que la matrice P est inversible et préciser la matrice inverse.
**2.b.** Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.
**2.c.** Calculer PDP.
**2.d.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.

On admet par la suite que pour tout entier naturel n, $M_n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3\times0,5^n - 3\times0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$.

**3.** Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.

**4.** Pour tout entier naturel n, on définie la matrice $V_n$ par $V_n = U_n - X$.
**4.a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$.
**4.b.** On admet que, pour tout entier naturel non nul n, $V_n = M^nV_0$.

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \begin{pmatrix} -18\times0,5^n + 9\times0,25^n + 10 \\ -3\times0,25^n + 4 \end{pmatrix}$.

**5.a.** Montrer que la suite $(b_n)$ est croissante et majorée. Déterminer sa limite.
**5.b.** Déterminer la limite de la suite $(a_n)$.
**5.c.** On admet que la suite $(a_n)$ est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est à dire pour éviter tout débordement.

**CORRECTION**

**1.** Pour tout entier naturel n :

$a_n$ et $b_n$ sont les quantités d'eau (en centaines de litres) qui sont respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de $n$ heures et $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ au bout de $n+1$ heures.

$a_{n+1}$ est égale à $a_n$ diminuée de $0{,}5\,a_n$ (vidée dans la réserve R) et augmentée de $0{,}75\,b_n$ ( provenant du bassin B ) et augmentée de 2 (centaines de litres).

$a_{n+1}=a_n-0{,}5\,a_n+0{,}75\,b_n+2=0{,}5\,a_n+0{,}75\,b_n+2$ .

$b_{n+1}$ est égale à $b_n$ diminuée de $0{,}75\,b_n$ (vidée dans le bassin A) et augmentée de 3 (centaines de litres).

$b_{n+1}=b_n-0{,}75\,b_n+3=0{,}25\,b_n+3$

$$\begin{cases} a_{n+1}=0{,}5\,a_n+0{,}75\,b_n+2 \\ b_{n+1}=\qquad 0{,}25\,b_n+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5\,a_n+0{,}75\,b_n \\ 0{,}25\,b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc $U_{n+1}=MU_n+C$ avec $M=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

**2.a.** $P=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$P^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+3\times0 & 1\times3+3\times(-1) \\ 0\times1-1\times0 & 0\times3-1\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

$P\times P=I$ donc $P$ est inversible et $P^{-1}=P$ .

**2.b.** $$PMP=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times0{,}5+3\times0 & 1\times0{,}75+3\times0{,}25 \\ 0\times0{,}5-1\times0 & 0\times0{,}75-1\times0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PMP=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & -0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5\times1+1{,}5\times0 & 1{,}5\times3+1{,}5\times(-1) \\ 0\times1-0{,}25\times0 & 0\times3-0{,}25\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}=D\ .$$

**2.c.** $$PDP=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & -0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}=M\ .$$

**2.d.** On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n=PD^nP$ .

Initialisation

Pour $n=0$, on convient que $M^0=I$ et $D^0=I$ .

$PD^0P=PIP=PP=I$ donc $M^0=PD^0P$ .

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $M^n=PP^nP$ et on doit démontrer que $M^{n+1}=PD^{n+1}P$ .

Or $M^{n+1}=M^n\times M$ et $M^n=PD^nP$ et $M=PDP$

donc $M^{n+1}=(PD^nP)(PDP)=PD^n(PP)DP=PD^nIDP=PD^nDP=PD^{n+1}P$

Conclusion

Le principe de récurrence, nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $M^n=PD^nP$ .

**3.** $X=\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$MX+C=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+3 \\ 0+1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}=X\ .$$

**4.** Pour tout entier naturel n, $V_n=U_n-X$ donc $U_n=V_n+X$

**4.a.** Pour tout entier naturel n, $V_{n+1}=U_{n+1}-X$ .
Or $U_{n+1}=MU_n+C$ et $X=MX+C$
$V_{n+1}=MU_n+C-MX-C=M(U_n-X)=MV_n$

**4.b.** On admet que pour tout entier naturel n, $V_n=M^nV_0$

$$V_0=U_0-X=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$$

$$V_n=\begin{pmatrix}0{,}5^n & 3\times0{,}5^n-3\times0{,}25^n\\0 & 0{,}25^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\times0{,}5^n-9\times0{,}5^n+9\times0{,}25^n\\0\times(-9)-3\times0{,}25^n\end{pmatrix}$$

$$V_n=\begin{pmatrix}-18\times0{,}5^n+9\times0{,}25^n\\-3\times0{,}25^n\end{pmatrix}$$

$$U_n=V_n+X=\begin{pmatrix}-18\times0{,}5^n+9\times0{,}25^n+10\\-3\times0{,}25^n+4\end{pmatrix}$$

**5.a.** Pour tout entier naturel n, $b_n=-3\times0{,}25^n+4$
$b_{n+1}-b_n=-3\times0{,}25^{n+1}+4+3\times0{,}25^n-4=3\times0{,}25^n(-0{,}25+1)=3\times0{,}75\times0{,}25^n>0$
La suite $(b_n)$ est croissante.
$b_n=4-3\times0{,}25^n$ or $-3\times0{,}25^n<0$ donc $b_n<4$ et la suite $(b_n)$ est majorée par 4.
$0<0{,}25<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}25^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=4$

**5.b.** Pour tout entier naturel n, $a_n=-18\times0{,}5^n+9\times0{,}25^n+10$
$0<0{,}5<1$ et $0<0{,}25<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}5^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}25^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=10$ .

**5.c.** On admet que la suite $(a_n)$ est croissante.
Si la suite $(a_n)$ est croissante et de limite 10 alors 10 est un majorant de la suite et pour tout entier naturel n, $a_n<10$ .
Conséquence :
**Il suffit de prévoir une contenance de 10 centaines de litres (1000 litres) pour le bassin A et une contenance de 4 centaines de litres (400 litres) pour le bassin B pour éviter tout débordement.**