EXERCICE 1 — 6 points

Partie A

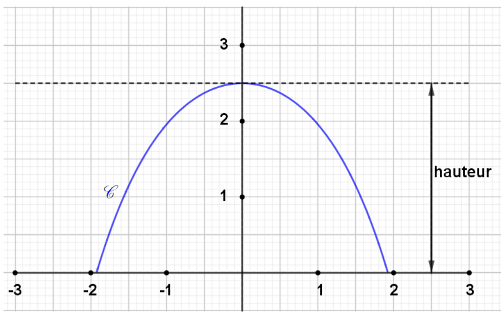
On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$.

1.a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
1.b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
1.c. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet, sur l'intervalle $[0;+\infty[$,une unique solution que l'on note α .

2. En remarquant que, pour tout réel x, $f(-x)=f(x)$, justifier que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

Partie B

Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température.
Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.
Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la **partie A.** Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$.



On admettra que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

1. Calculer la hauteur d'un arceau.

2.a. Dans cette question, on se propose de calculer la valeur exacte de la longueur de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;\alpha]$. on admet que cette longueur est donnée, en mètre, par l'intégrale :

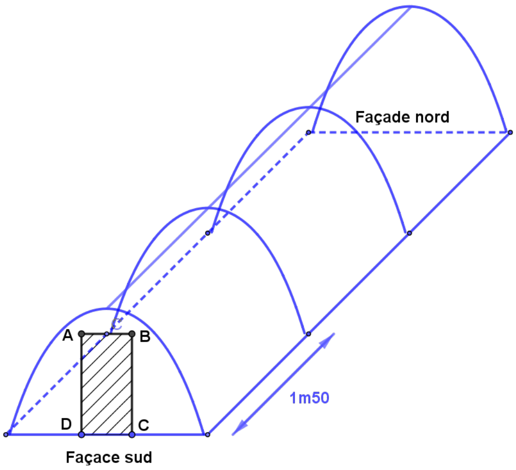
$$I=\int_{0}^{\alpha}\sqrt{1+(f'(x))^{2}}\,dx$$

Montrer que, pour tout réel x, on a $1+(f'(x))^{2}=\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^{2}$.

2.b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I en fonction de α .
Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à : $e^{\alpha}-e^{-\alpha}$.

Partie C

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.
On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-après.
Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle ABCD de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m^2, de bâche pastique nécessaire pour réaliser cette serre. Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

1. Montrer que la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2, par : $\mathcal{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx - 2$.

2. On prend 1,92 pour valeur approchée de α. Déterminer, au m^2 près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x $f(x)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

1.a. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ $\quad e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

1.b. f est dérivable sur ℝ.

$(e^x)'=e^x \qquad (e^{-x})'=-e^{-x}$

$f'(x)=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \qquad f'(0)=0$

Si x appartient à $]0;+\infty[$ alors $-x<x$ et $e^{-x}<e^x$ soit $0<e^x-e^{-x}$ et $f'(x)<0$
donc f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

1.c. $f(2)=-0{,}26$ **à** 10^{-2} près donc f(2)< 0

$f(0)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\times 2=\frac{5}{2}>0$

f est continue et strictement décroissante sur [0;2], f(0) >0 et f(2)< 0 donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle]0;2[.

2. Pour tout nombre réel x, $f(x)=f(-x)$ (f est une fonction paire).
On veut résoudre l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $]-\infty;0]$;
Si $x\leqslant 0$ alors $f(x)=0 \Leftrightarrow f(-x)=0 \Leftrightarrow -x=\alpha$ (car $-x\geqslant 0$) $\Leftrightarrow x=-\alpha$.
<u>Conclusion</u>
L'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dans ℝ : α et $-\alpha$.

Partie B

1. La hauteur d'un arceau est égale à $f(0)=\frac{5}{2}$ = **2,5 m.**

2.a. Pour tout nombre réel x, $f'(x)=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

On rappelle que $e^x\times e^{-x}=e^{x-x}=e^0=1$

$(f'(x))^2=\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2=\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})$

$1+(f'(x))^2=1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})=\frac{4+(e^{2x}-2+e^{-2x})}{4}=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}$

2.b. Pour tout nombre réel x,

$\sqrt{1+(f'(x))^2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=g(x)$

Soit G la fonction définie sur ℝ par $G(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

G est dérivable sur ℝ et $G'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=g(x)$.

G est une primitive de g sur ℝ.

$I=\int_0^{\alpha}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = G(\alpha)-G(0)$

$G(0)=0 \qquad I=\frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})$.

I est la longueur, en mètre, de la partie de l'arceau sur $[0;\alpha]$, la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses donc la longueur de la partie de l'arceau sur $[-\alpha;0]$ est aussi égale à I.

Conséquence
La longueur, en mètre, de l'arceau sur $[-\alpha;\alpha]$ est égale à $2\,I=e^{\alpha}-e^{-\alpha}$.

Partie C

1. Pour la façade nord :
L'aire de la partie de la bâche sur $[0;\alpha]$ est $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$.

L'axe des abscisses est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ donc $\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ et l'aire de la façade nord est $2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$.

Pour la façade sud , il faut enlever $2\ m^2$ pour l'ouverture donc l'aire obtenue est $2\int_0^{\alpha} f(x);dx$ - 2.

Pour les deux façades, on obtient : $4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ - 2.

2. $\alpha=1{,}92$ **à** 10^{-2} près.
La troisième partie a pour aire : $4{,}5\times(e^{\alpha}-e^{-\alpha})$. (La longueur de la serre est $3\times 1{,}5=4{,}5$ m).
$f(x)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

Soit F la fonction définie sur $[0;\alpha]$ par $F(x)=\frac{7}{2}x-\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$, $F'(x)=f(x)$
donc F est une primitive de f sur $[0;\alpha]$.
$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=F(\alpha)-F(0)=F(\alpha)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})$.
$4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx-2=14\alpha-2(e^{\alpha}-e^{-\alpha})-2$
On note A l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser la serre.
$A=14\alpha-2(e^{\alpha}-e^{-\alpha})-2+4{,}5\times(e^{\alpha}-e^{-\alpha})=14\alpha-2+2{,}5(e^{\alpha}-e^{-\alpha})=42$ au m^2 près.

Remarque
Dans l'exercice, on se demande pas de donner une valeur approchée à α dans la partie A. On pouvait utiliser la méthode de dichotomie pour obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près.
Mais on peut calculer la valeur exacte de α.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 3{,}5-0{,}5(e^{x}+e^{-x})=0 \Leftrightarrow 3{,}5-0{,}5\left(e^{x}+\frac{1}{e^{x}}\right)=0 \Leftrightarrow 7-(e^{x}+\frac{1}{e^{x}})=0$$
$$\Leftrightarrow 7e^{x}-(e^{x})^2-1=0 \Leftrightarrow -(e^{x})^2+7e^{x}-1=0$$
On pose $X=e^{x}$ on obtient : $-X^2+7X-1=0$ $\quad\Delta=7^2-4\times(-1)\times(-1)=49-4=45$
$$X_1=\frac{-7-\sqrt{45}}{-2}=\frac{7+\sqrt{45}}{2} \qquad X_2=\frac{-7+\sqrt{45}}{-2}=\frac{7-\sqrt{45}}{2}$$
$$e^{x}=\frac{7+\sqrt{45}}{2} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\right)=\alpha$$
$$e^{x}=\frac{7-\sqrt{45}}{2} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)$$
Pour vérifier que l'on obtient l'opposé de α il suffit de vérifier que $\frac{7-\sqrt{45}}{2}$ est l'inverse de $\frac{7+\sqrt{45}}{2}$.

Or $\frac{2}{7+\sqrt{45}}=\frac{2(7-\sqrt{45})}{49-45}=\frac{7-\sqrt{45}}{2}$.

