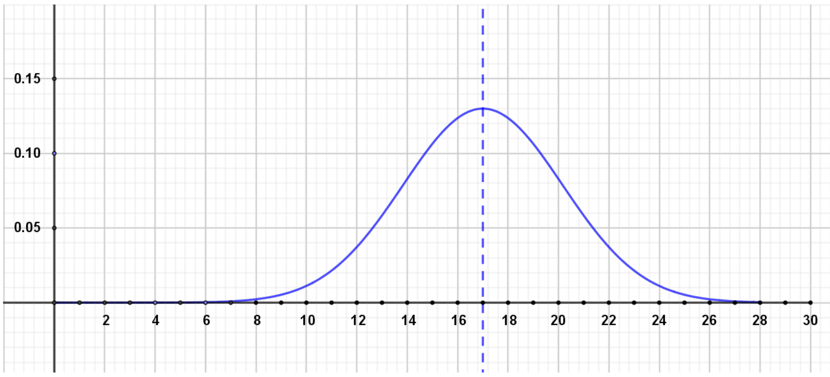
EXERCICE 2 — 5 points

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

Partie A

Les durées des parties de type A et de type B, exprimées en minutes, peuvent être modélisées respectivement par deux variables aléatoires X_A et X_B .
La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle [0;25].
La variable aléatoire X_B suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type 3. La représentation graphique de la fonction de densité de cette loi normale et son axe de symétrie sont donnés ci-dessous.



1.a. Calculer la durée moyenne d'une partie de type A.
1.b. Préciser à l'aide du graphique la durée moyenne d'une partie de type B.

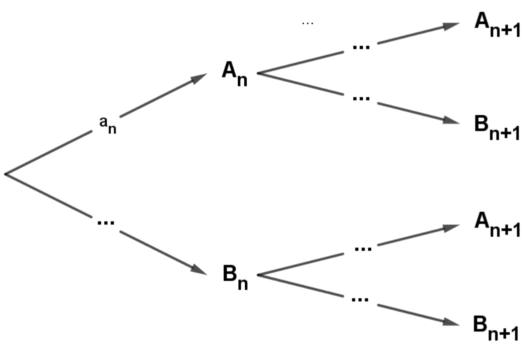
2. On choisit au hasard, de manière équiprobable,un type de jeu. Quelle est la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes ? On donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :
- Si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8.
- Si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les événements :
A_n : « la $n^{ième}$ partie est une partie de type A ».
B_n : « la $n^{ième}$ partie est une partie de type B ».
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'événement A_n .

1.a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous



1.b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
$a_{n+1} = 0{,}5\,a_n + 0{,}3$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de la , première partie où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle [0;1]. La suite (a_n) est donc définie par :
$a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0{,}5\,a_n + 0{,}3$.

2. *Étude d'un cas particulier.*
Dans cette question , on suppose que $a = 0{,}5$.

2.a. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0{,}6$.

2.b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

2.c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

3. *Étude du cas général*
Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle [0;1].
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $u_n = a_n - 0{,}6$.

3.a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

3.b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on $a : a_n = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6$

3.c. Déterminer la limite de la suite (a_n) . Cette limite de la suite dépend-elle de la valeur de a ?

3.d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B.Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

CORRECTION

Partie A

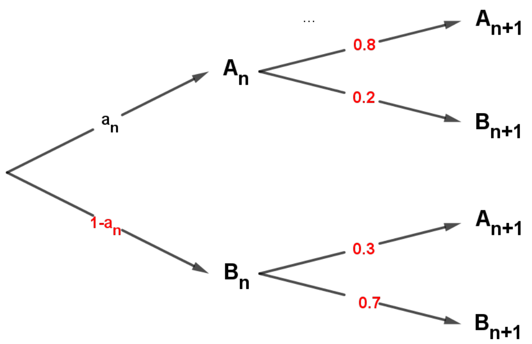
1.a. X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle [9;25], donc la durée moyenne d'une partie de type A est : $\frac{9+25}{2}$ = **17min.**

1.b. X_B suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type 3. L'axe de symétrie de la représentation de la fonction de densité est la droite d'équation x=17 donc la durée moyenne d'une partie de type b est **μ= 17min.**

2. On note A l'événement, la partie choisie est une partie de type A.
On note B l'événement, la partie choisie est une partie de type B.
$B=\bar{A}$, le choix de type de partie est équiprobable donc $P(A)=P(B)=0{,}5$.
$P_A(X_A\leqslant 20)=\frac{20-9}{25-9}=\frac{11}{16}$.
$P_B(X_B\leqslant 20)=0{,}68$ (en utilisant la calculatrice ou en remarquant que $20=\mu+\sigma$).
On note X la durée de la partie en minutes.
En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(X\leqslant 20)=P((X=X_A)\cap(X_A\leqslant 20))+P((X=X_B)\cap(X_B\leqslant 20)) = P(A)\times P_A(X_A\leqslant 20)+P(B)\times P_B(X_B\leqslant 20)$
$P(X\leqslant 20)=0{,}5\times\frac{11}{16}+0{,}5\times 0{,}68$ = **0,76 au centième près.**

Partie B

1.a. $P(A_n)=a_n$ $P(B_n)=1-a_n$.
Si le joueur achève une partie A, la plateforme lui propose de jouer une partie de type A avec une probabilité 0,8 donc : $P_{A_n}(A_{n+1})=0{,}8$ et $P_{A_n}(B_{n+1})=1-0{,}8=0{,}2$.
Si le joueur achève une partie B, la plateforme lui propose de jouer une partie de type B avec une probabilité 0,7 donc : $P_{B_n}(B_{n+1})=0{,}7$ et $P_{B_n}(A_{n+1})=1-0{,}7=0{,}3$.
On complète l'arbre pondéré :



1.b. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:
$a_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_{n+1}\cap A_n)+P(A_{n+1}\cap B_n) = P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)\times P_{B_n}(B_{n+1})$
$a_{n+1}=a_n\times 0{,}8+(1-a_n)\times 0{,}3=0{,}8a_n-0{,}3a_n+0{,}3=0{,}5a_n+0{,}3$.

2. On suppose que $a=0{,}5$.

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a : $0\leqslant a_n\leqslant 0{,}6$.
<u>Initialisation</u>
Pour $n=1$ $a_1=a=0{,}5$ donc $0\leqslant a_1\leqslant 0{,}6$.
La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on suppose $0 \leqslant a_n \leqslant 0{,}6$ et on doit démontrer que $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0{,}6$.

Or, si $0 \leqslant a_n \leqslant 0{,}6$ alors $0 \leqslant 0{,}5 \times a_n \leqslant 0{,}5 \times 0{,}6 \Leftrightarrow 0 \leqslant 0{,}5\, a_n \leqslant 0{,}3$ et $0+0{,}3 \leqslant 0{,}5\, a_n + 0{,}3 \leqslant 0{,}3+0{,}3$ soit $0{,}3 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0{,}6$ donc $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0{,}6$.

Conclusion

Le prince de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0{,}6$.

2.b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$a_{n+1} - a_n = 0{,}5\, a_n + 0{,}3 - a_n = 0{,}3 - 0{,}5\, a_n = 0{,}5 \times (0{,}6 - a_n) \geqslant 0$$

La suite (a_n) est croissante.

2.c. La suite (a_n) est croissante et majorée par 0,6 donc convergente on note L sa limite.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0{,}5\, a_n + 0{,}3$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1} = L$.

Donc $L = 0{,}5\, L + 0{,}3 \Leftrightarrow 0{,}5\, L = 0{,}3 \Leftrightarrow L = 0{,}6$

Conclusion

La suite (a_n) converge vers 0,6.

3. $a_1 = a \quad 0 \leqslant a_1 \leqslant 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $a_{n+1} = 0{,}5\, a_n + 0{,}3$.

3.a. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = a_n - 0{,}6$ donc $a_n = u_n + 0{,}6$.

$$u_{n+1} = a_{n+1} + 0{,}6 = 0{,}5\, a_n + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}5\, a_n - 0{,}3 = 0{,}5(u_n + 0{,}6) - 0{,}3 = 0{,}5\, u_n + 0{,}3 - 0{,}3 = 0{,}5\, u_n.$$

La suite (u_n) est la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = a_1 - 0{,}6 = a - 0{,}6$.

3.b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6$.

$$a_n = u_n + 0{,}6 = (a - 6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6.$$

3.c. $0 \leqslant 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}6$.

La limite est indépendante de la valeur de a.

3.d. Pour n assez grand la valeur de a_n est voisine de $0{,}6$ donc $a_n > 0{,}5$.

Donc le joueur jouera plus de parties de type A que des parties de type B, et la publicité la plus vue par le joueur sera celle insérée au début des parties de type A.