EXERCICE 3 4 points

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.
On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de (E).
On note O le point d'affixe 0.

Affirmation 1 : Le triangle OAB est équilatéral.

2. On note u le nombre complexe : $u=\sqrt{3}+i$ et on note $\bar{u}$ son conjugué.

Affirmation 2 : $u^{2019}+\bar{u}^{2019}=2^{2019}$

3. Soit n entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :
$f_n(x)=x\,e^{-nx+1}$.

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, la fonction f_n admet un maximum.

4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos(x)e^{-x}$.

Affirmation 4 : La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.

5. Soit A un nombre réel strictement positif.
On considère l'algorithme ci-dessous.

```
I ← 0
Tant que 2^I ⩽ A
    I ← I+1
Fin Tant que
```

On suppose que la variable I contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme.

Affirmation 5 : $15\ln(2)\leqslant\ln(A)\leqslant 2\ln(16)$.

CORRECTION

1. **Affirmation 1 :** **VRAIE**

Justification

(E) ; $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times4=12-16=-4=(2\,i)^2$

(E) admet deux solutions complexes conjuguées.

$z_1=\dfrac{2\sqrt{3}-2\,i}{2}=\sqrt{3}-i \qquad z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}+i$

$A(z_1) \qquad B(z_2) \qquad O(0)$

$OA=|z_1| \qquad OB=|z_2| \qquad AB=|z_2-z_1|$

$|z_1|^2=3+1=4 \qquad |z_1|=2 \qquad |z_2|=|\overline{z_1}|=2$

$z_2-z_1=\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i=2\,i \qquad |z_2-z_1|=2$

$OA=OB=AB=2$ donc le triangle OAB est équilatéral.

2. **Affirmation 2 :** **FAUSSE**

Justification

$|\sqrt{3}+i|=2 \qquad u=\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Pour tout entier naturel $n\geqslant1$

$u^n=2^n e^{in\frac{\pi}{6}}$ donc $u^{2019}e^{i\times2019\times\frac{\pi}{6}}$

$2019=168\times12+3$ donc $2019\times\dfrac{\pi}{6}=168\times2\pi+\dfrac{\pi}{2}$ et $2019\times\dfrac{\pi}{6}\equiv\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$

$u^{2019}=2^{2019}\times e^{i\frac{\pi}{2}}=2^{2019}i \qquad \overline{u}^{2019}=-2^{2019}i$

$u^{2019}+\overline{u}^{2019}=0\neq2^{2019}$

3. **Affirmation 3 :** **VRAIE**

Justification

Pour tout entier naturel non nul, f_n est dérivable sur $[0;+\infty[$;

$f'_n(x)=1\times e^{-nx+1}+x\times(-n\,e^{-nx+1})=(1-nx)e^{-nx+1}$

Le signe de $f'_n(x)$ sur $[0;+\infty[$ est le signe de $1-nx$.

$1-nx=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{1}{n}>0$

$1-nx>0 \quad\Leftrightarrow\quad 1>nx \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{n}>x$

Variations de f_n

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	−
$f_n(x)$	↗		↘

f_n admet donc un maximum pour $x=\dfrac{1}{n}$.

4. **Affirmation 4 :** **VRAIE**

Justification

Pour tout nombre réel x $-1\leqslant\cos(x)\leqslant1$ et $e^{-x}>0$

donc $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant e^{-x}$

$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

Le théorème des gendarmes, nous permet d'affirmer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation y = 0 est donc une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

5. Affirmation 5 : **FAUSSE**

Justification

Si la variable I contient la valeur 15 en fin d'exécution de l'algorithme alors $2^{15} > A$ et $2^{14} \leqslant A$

soit $2^{14} \leqslant A < 2^{15}$.

La fonction ln est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$\ln(2^{14}) = \ln(A) < \ln(2^{15})$

$14 \ln(2) \leqslant \ln(A) < 15 \ln(12)$.

