EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée en annexe.
On note I le milieu du segment [EF], J le milieu du segment [EH] et K le point du segment [AD] tel que $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
On note $\mathscr{P}$ le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

Partie A

Dans cette partie, les constructions demandées seront effectuées sans justifications sur la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie.

1. Le plan (FHK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note M. Construire le point M.

2. Construire la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

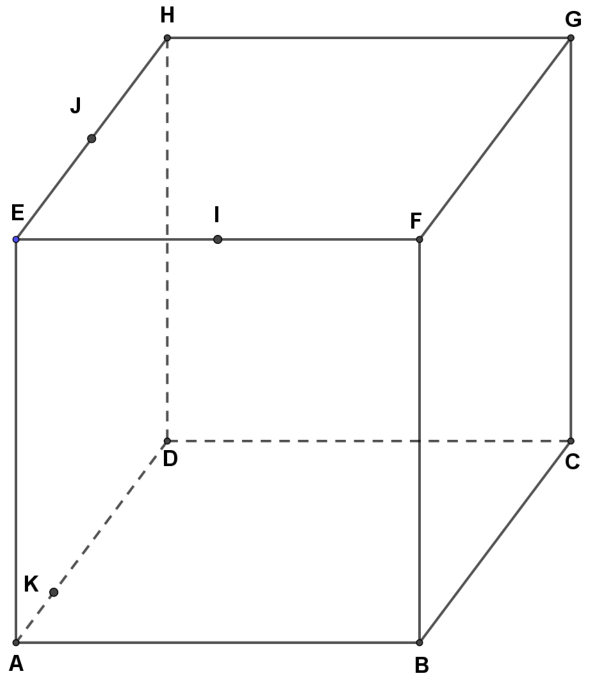
Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$.
On rappelle que $\mathscr{P}$ est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

1.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FHK).
1.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FHK) est : $4x+4y-3z-1=0$.
1.c. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$.
1.d. Calculer les coordonnées du point M', point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et la droite (AE).

2. On note Δ La droite passant par E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
2.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
2.b. Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
2.c. Tracer la droite Δ sur la figure donnée en annexe.
2.d. Les droites Δ et (BF) sont-elles sécantes?Qu'en est-il des droites Δ et (CG) ? Justifier.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE



CORRECTION

Partie A

1. Le point M est le point d'intersection des droites (HK) et (AE).

2. Les plans (FHK) et $\mathscr{P}$ sont parallèles.
Les droites d'intersection de ces deux plans et du plan (EFG) sont parallèles.
Donc la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (EFG) est la parallèle à (FH) passant par I (milieu de [EF]), cette droite passe donc par J milieu de [EH].
Les droites d'intersection des plans (FHK) et $\mathscr{P}$ et du plan (ADH) sont parallèles.
La droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ADH) est la droite parallèle à (HK) passant par J, cette droite coupe (AE) en M' (qui est le milieu de [EM]).
La section du cube par le plan $\mathscr{P}$ est le triangle IJM'.

Partie B

$(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.
On donne les coordonnées des point de la figure.
A(0;0;0) B(1;0;0) C(1;1;0) D(0;1;0) E(0;0;1) F(1;0;1) G(1;1;1) H(0;1;1)
I(0,5;0;1) J(0;0,5;1) K(0;0,25;0).

1.a. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (FHK) si et seulement si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (FHK), par exemple les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FK}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-1\\0,25\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{FH}=4\times(-1)+4\times1-3\times0=-4+4+0=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{FK}=4\times(-1)+4\times0,25-3\times(-1)=-4+1+3=0$

donc $\vec{n}$ **est un vecteur normal au plan (FHK).**

1.b. M(x;y;z) F(1;0;1) $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z-1\end{pmatrix}$

M(x;y;z) appartient au plan (FHK) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{FM}=0$ $\Leftrightarrow$ $4\times(x-1)+4y-3\times(z-1)=0$
$\Leftrightarrow$ **4x+4y-3z-1=0**

1.c. $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (FHK)
$\mathscr{P}$: 4x+4y-3z+k=0 (k est une constante réelle).
I(0,5;0;1) appartient à $\mathscr{P}$.
$4\times0,5+4\times0-3\times1+k=0 \Leftrightarrow 2-3+k=0 \Leftrightarrow k=1$
$\mathscr{P}$: 4x+4y-3z+1=0

1.d. (AE) est la droite passant par A(0;0;0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

On donne une représentation paramétrique de (AE).

(AE) : $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{P}$ et (AE), on résout le système :

$$\begin{cases}4x+4y-3z+1=0\\x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$$

On obtient : $-3t+1=0 \iff t=\frac{1}{3}$ donc $M'\left(0;0;\frac{1}{3}\right)$.

2.a. Δ est la droite passant par E(0;0;1) et de vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$.

$$\Delta : \begin{cases} x = 4m \\ y = 4m \\ z = -3m+1 \end{cases} \quad m \text{ décrit } \mathbb{R}$$

2.b. (ABC) : z=0

On résout le système ;

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 4m \\ y = 4m \\ z = -3m+1 \end{cases}$$

On obtient : $-3m+1=0 \iff m=\frac{1}{3}$

$x=\frac{4}{3}$ $\quad y=\frac{4}{3}$ $\quad L\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};0\right)$.

2.c. On place les points $P\left(\frac{4}{3};0;0\right)$ et $Q\left(0;\frac{4}{3};0\right)$ puis le point L et on trace $\Delta=(EL)$.

2.d. Le point L n'appartient pas au plan (ABF) donc le plan (ABF) et la droite Δ sont sécants en E.
La droite (BF) est contenue dans le plan (ABF), le point E n'appartient pas à (BF) donc les droites (BF) et Δ ne sont pas sécantes.

On vérifie que les points A ; C et L sont alignés, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AL}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

donc le point L appartient au plan (AEC)=(ACG).
Δ et (CG) sont contenues dans le plan (ACG), Δ et (CG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes en R.

On peut vérifier que $\overrightarrow{ER}=\frac{1}{4}\vec{n}$.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE