## EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Dans cet exercice, on étudie l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices qui s'écrivent sous la forme $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ et vérifient $ad-bc=1$.

On note I la matrice identité, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Partie A**

**1.** Vérifier que la matrice $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}$.

**2.** Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{S}$ ; les expliciter.

**3.a.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x-2y=1$. On pourra remarquer que le couple $(1;2)$ est une solution solution particulière de cette équation.

**3.b.** En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à l'ensemble $\mathcal{S}$.

Décrire ces matrices.

**Partie B**

Dans cette partie, on note $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble $\mathcal{S}$. On rappelle que a, b, c et d sont des entiers relatifs tel que $ad-bc=1$.

**1.** Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.

**2.** Soit B la matrice $B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

**2.a.** Calculer le produit AB. On admet que AB=BA.

**2.b.** En déduire que la matrice A est inversible et donner la matrice inverse $A^{-1}$.

**2.c.** Montrer que $A^{-1}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}$.

**3.** Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

**3.a.** Montrer que $x=dx'-by'$. On admet de même que $y=ay'-cx'$.

**3.b.** On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Montrer que D=D'.

**4.** On considère les suites d'entiers naturels $(x_n)$ et $(y_n)$ définies par $x_0=2019$ et $y_0=673$ et pour tout naturel n $\begin{cases} x_{n+1}=2x_n+3y_n \\ y_{n+1}=x_n+2y_n \end{cases}$

En utilisant la question précédente, déterminer pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers $x_n$ et $y_n$.

**CORRECTION**

**Partie A**

**1.** 6, 5, -5 et 4 sont des entiers relatifs.
$6\times(-4)-5\times(-5)=-24+25=1$
donc la matrice $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}$.

**2.** On doit déterminer les entiers relatifs $a$ et $d$ vérifiant $ad-2\times 3=1 \quad\Leftrightarrow\quad ad=7$.
7 est un nombre premier donc 7 admet quatre diviseurs entiers relatifs : -7 ; -1 ; 1 et 7.
On obtient pour couples (a;d) : (-7;-1) ; (-1;-7) ; (1;7) et (7;1).
Les quatre matrices de la forme demandée appartenant à $\mathcal{S}$ sont :
$\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

**3.a.** (E) : $5x-2y=1$
$5\times 1-2\times 2=5-4=1$ donc le couple (1;2) est une solution particulière de l'équation (E).
$5x-2y=1 \quad\Leftrightarrow\quad 5x-2y=5\times 1-2\times 2 \quad\Leftrightarrow\quad 5(x-1)=2(y-2)$.
5 et 2 sont premiers entre eux.
5 divise 2(y-2) et 5 est premier avec 2, le théorème de Gauss nous permet d'affirmer que 5 divise y-2 donc il existe un entier relatif $k$ tel que $y-2=5k$ (ou $y=5k+2$).
Pour tout entier relatif k :
si $y-2=5k$ alors $5(x-1)=2(y-2) \quad\Leftrightarrow\quad 5(x-1)=2\times 5k \quad\Leftrightarrow\quad x-1=2k$ (ou $x=2k+1$).
Donc l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(2k+1;5k+2)$ lorsque k décrit $\mathbb{Z}$.

**3.b.** $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $a$ et $b$ sont des entiers relatifs vérifiant $5a-2b=1$
$\Leftrightarrow$ (a;b) est un couple solution de l'équation (E).
<u>Conclusion</u>
Toutes les matrices de la forme $A_k=\begin{pmatrix} 2k+1 & 5k+2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ avec k appartenant à $\mathbb{Z}$, sont les matrices de la forme de A, appartenant à $\mathcal{S}$.

**Partie B**

**1.** $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}$ donc a, b, c et d sont des entiers relatifs vérifiant $ad-bc=1$.
Il existe deux entiers relatifs $x=d$ et $y=-c$ tels que $ax+by=1$, le théorème de Bezout nous permet de conclure que les nombres $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

**2.a.** $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ dc-dc & -bc+ad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$

**2.b.** On admet que $BA=AB=I$ donc A est inversible et $A^{-1}=B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

**2.c.** Les coefficients de $A^{-1}$ sont des entiers relatifs et $d\times a-(-b)\times(-c)=ad-bc=1$
donc $A^{-1}$ appartient à $\mathcal{S}$.

**3.a.** $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=dx'-by' \\ y=-cx'+ay' \end{cases}$

**3.b.** $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ Tout diviseur commun de x et y divise x' et y' donc est un diviseur commun de x' et y'.

$\begin{cases} x=dx'-by' \\ y=-cx'+ay' \end{cases}$ Tout diviseur commun de x' et y' divise x et y donc est un diviseur commun de x et y.

L'ensemble des diviseurs communs de x' et y' (qui est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD: D') est égal à l'ensemble des diviseurs communs de x et y (qui est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD : D).

Conclusion

D' = D

**4.** Pour tout entier naturel n :

$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n+3y_n \\ y_{n+1}=x_n+2y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Les coefficients de A sont des entiers relatifs et $2\times 2-3\times 1=1$ donc A appartient à $\mathcal{S}$.

On note $D_n$ le PGCD de $x_n$ et $y_n$.

En utilisant le résultat de la question 3.b., on obtient $D_{n+1}=D_n$.

$x_0=2019$ et $y_0=673$ or $2019=673\times 3$ donc $D_0$ le PGCD de $x_0$ et $y_0$ est égal à 673.

. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $D_n=673$.

Initialisation

Nous avons vu que $D_0=673$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $D_n=673$ et on doit démontrer que $D_{n+1}=673$.

Or $D_{n+1}=D_n$ donc si $D_n=673$ alors $D_{n+1}=673$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $D_n=673$.