EXERCICE 1 — 4 points

Lors d'un examen professionnel, chaque candidat doit présenter un dossier de type A ou un dossier de type B ; 60% des candidats présentent un dossier de type A, les autres présentant un dossier de type B.
Le jury attribue à chaque dossier une note comprise entre 0 et 20. Un candidat est reçu si la note attribuée à son dossier est supérieure ou égale à 10.
On choisit au hasard un dossier.
On admet qu'on peut modéliser la note attribuée à un dossier de type A par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance 11,3 et d'écart-type 3, et la note attribuée à un dossier de type B par une variable aléatoire Y suivant la loi normale d'espérance 12,4 et d'écart-type 4,7.
On pourra noter A l'événement : « le dossier est un dossier de type A », B l'événement : « le dossier est un dossier de type B », et R l'événement : « le dossier est celui d'un candidat reçu à l'examen ».
Les probabilités seront arrondies au centième.

1. Le dossier choisi est de type A. Quelle est la probabilité que ce dossier choisi soit celui d'un candidat reçu à l'examen? On admet que la probabilité que le dossier choisi, sachant qu'il est de type B, soit celui d'un candidat reçu est égale à 0,70.

2. Montrer que la probabilité, arrondie au centième, que le dossier choisi soit celui d'un candidat reçu à l'examen est égale à 0,68.

3. Le jury examine 500 dossiers choisis aléatoirement parmi les dossiers de type B. Parmi ces dossiers, 363 sont ceux de candidats reçus à l'examen.
Un membre du jury affirme que cet échantillon n'est représentatif. Il justifie son affirmation en expliquant que dans cet échantillon, la proportion de candidats reçus est trop grande.
Quel argument peut-on avancer pour confirmer ou contester ses propos ?

4. Le jury décerne un « prix du jury » aux dossiers ayant obtenu une note supérieure ou égale à N, où N est un nombre entier. La probabilité qu'un dossier choisi au hasard obtienne le « prix du jury » est comprise entre 0,10 et 0,15.
Déterminer le nombre entier N.

CORRECTIO N

1. Le dossier choisi est de type A. On peut modéliser la note attribuée à un dossier de type A par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance 11,3 et d'écart-type 3.
Un candidat est reçu si la note attribuée à son dossier est supérieure ou égale à 10.
En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(10\leqslant X)$ = **0,67** arrondi au centième.
$P(10\leqslant 10)=P_A(R)$
On admet $P(10\leqslant Y)=P_B(R)=0{,}7$.

2. 60 % des candidats présentent un dossier de type A donc $P(A)=0{,}6$ et $P(B)=1-P(A)=1-0{,}6=0{,}4$.
On construire un arbre pondéré ou en utilisant la formule des probabilités totales :
$P(R)=P(A\cap R)+P(B\cap R)=P(A)\times P_A(R)+P(B)\times P_B(R)=0{,}6\times 0{,}67+0{,}4+0{,}7=0{,}402+0{,}28=0{,}682$
P(R)= **0,68** arrondi au centième.

3. Les 500 dossiers sont choisis de manière aléatoire.
La probabilité qu'un candidat, ayant présenté un dossier de type B, d'être reçu à l'examen est : p = 0,7.
L'échantillon choisi de est de taille 500.
$n=500\geqslant 30$ $np=350\geqslant 5$ $n(1-p)=150\geqslant 30$
On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
$$I=\left[0{,}7-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}7\times 0{,}3}{500}};0{,}7+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}7\times 0{,}3}{500}}\right]$$
$1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}7\times 0{,}3}{500}}=0{,}0402=0{,}04$ arrondi au centième.
$I=[0{,}7-0{,}04;0{,}7+0{,}04]=[0{,}66;0{,}74]$.
La proportion de candidats reçus à l'examen dans l'échantillon est : $f=\frac{368}{500}=0{,}736=0{,}74$ arrondi au centième.
F appartient à I.
Donc, au seuil de 95 %, on conteste les propos du membre du jury.

4. Rappel
Si Z est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors :
$P(\mu-\sigma\leqslant Z\leqslant\mu+\sigma)=0{,}68$ arrondi an centième $P(\mu+\sigma\leqslant Z)=0{,}16$.
- Pour X $P(11{,}3+3\leqslant X)=P(14{,}3\leqslant X)=0{,}16$
- Pour Y $P(12{,}4+4{,}7\leqslant Y)=P(17{,}1\leqslant Y)0{,}16$.
- La probabilité du nombre de candidats ayant une note supérieure ou égale à N décroît lorsque N croît.
La première valeur de N à considérer est : 15.
En utilisant la calculatrice :
$P(15\leqslant X)=0{,}11$ et $P(15\leqslant Y)=0{,}29$
La probabilité qu'un candidat est une note supérieure ou égale à 15 est :
$0{,}6\times 0{,}11+0{,}4\times 0{,}29=0{,}066+0{,}116=0{,}182>0{,}15$
$P(16\leqslant X)=0{,}06$ et $P(16\leqslant Y)=0{,}22$
La probabilité qu'un candidat est une note supérieure ou égale à 16 est :
$0{,}6\times 0{,}06+0{,}4\times 0{,}22=0{,}036+0{,}088=0{,}124$ $0{,}10\leqslant 0{,}12\leqslant 0{,}15$
$P(17\leqslant X)=0{,}03$ $P(17\leqslant Y)=0{,}16$
La probabilité qu'un candidat est une note supérieure ou égale à 167est :
$0{,}6\times 0{,}03+0{,}4\times 0{,}10{,}018+0{,}064=0{,}082<0{,}10$
Conclusion
N=16 pour qu'un dossier choisi au hasard obtienne « le prix du juru ».