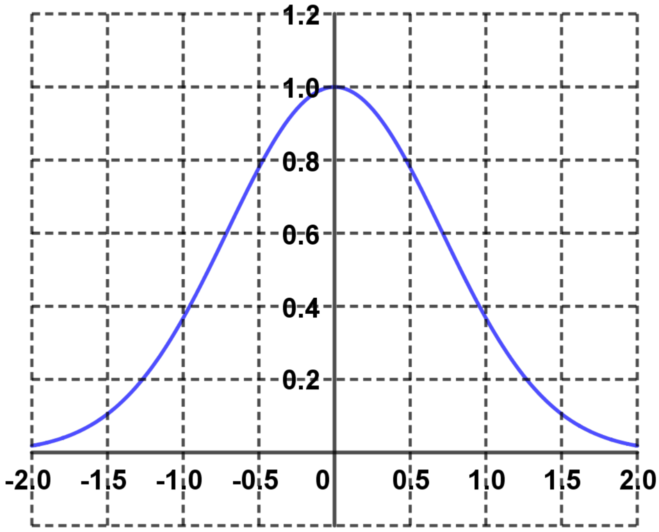
EXERCICE 2 — 6 points

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthogonal d'une fonction g définie et et continue sur $\mathbb{R}$. La courbe $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et se situe dans le demi-plan $y > 0$.



Pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$ on pose : $G(t)=\int_0^t g(u)\,du$.

Partie A

Les justifications des réponses aux questions suivantes pourront s'appuyer sur des considérations graphiques.

1. La fonction G est-elle croissante sur $[0;+\infty[$? Justifier.

2. Justifier graphiquement l'inégalité $G(1)\leqslant 0{,}9$.

3. La fonction G est-elle positive sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Dans la suite du problème, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u)=e^{-u^2}$.

Partie B

1. Étude de g
1.a. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
1.b. Calculer la fonction dérivée de g et en déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
1.c. Préciser le maximum de g sur $\mathbb{R}$. En déduire que $g(1)\leqslant 1$.

2. On note E l'ensemble des points M situés entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. On appelle I l'aire de de cet ensemble.

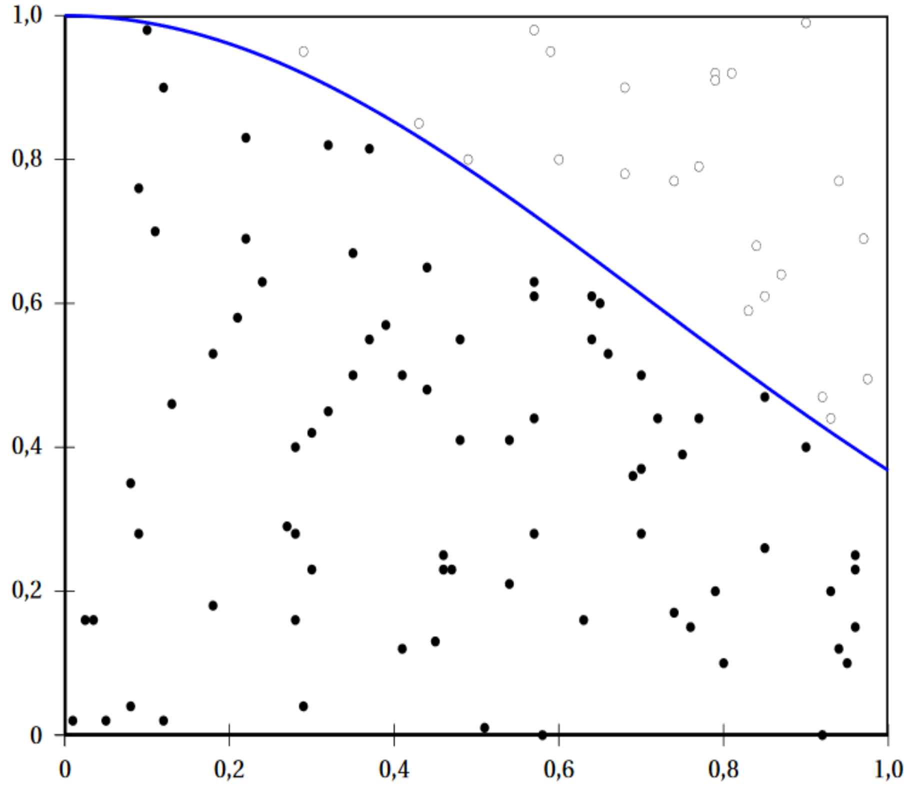
On rappelle que : $I=G(1)=\int_0^1 g(u)\,du$.

On souhaite estimer l'aire I par la méthode dite de « Monte-Carlo » décrite ci-après.

- On choisit un point M(x;y) en tirant au hasard de façon indépendante ses coordonnées x et y selon la loi uniforme sur l'intervalle [0;1]. On admet que la probabilité que le point M appartienne à l'ensemble E est égale à I.

- On répète n fois l'expérience du choix d'un point M au hasard. On compte le nombre c de points appartenant à l'ensemble E parmi les n points obtenus.
- La fréquence $f=\frac{c}{n}$ est une estimation de I.

2.a. La figure ci-dessous illustre la méthode présentée pour $n=100$. Déterminer la valeur de f correspondant à ce graphique.



2.b. L'exécution de l'algorithme ci-dessous utilise la méthode de Monte-Carlo décrite précédemment pour déterminer une valeur du nombre f.
Recopier et compléter cet algorithme.

f, x et y sont des nombres réels, n, c et i sont des entiers naturels.
ALEA est une fonction qui génère aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1.

```
c ← 0
Pour i variant de 1 à n faire
    x ← ALEA
    y ← ALEA
    Si y≤... alors
        c ← ...
    Fin SI
Fin Pour
f ← ...
```

2.c. Une exécution de l'algorithme pour $n=1000$ donne $f=0{,}757$.
En déduire un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % de la valeur exacte de I.

Partie C

On rappelle que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u)=e^{-u^2}$ et que la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$G(t)=\int_0^t g(u)\,du$.

On se propose de déterminer une majoration de G(t) pour $t\geqslant 1$.

1. *Un résultat préliminaire*

On admet que pour tout réel $u \geqslant 1$, on a $g(u) \leqslant \frac{1}{u^2}$.

En déduire que,pour tout réel $t \geqslant 1$, on a :

$$\int_1^t g(u)\,du \leqslant 1 - \frac{1}{t}$$

2. Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 1$,

$$G(t) \leqslant 2 - \frac{1}{t}$$

Que peut-on dire de la limite éventuelle de G(t) lorsque t tend vers $+\infty$?

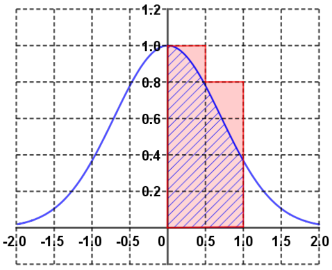
CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel t appartenant à $[0;+\infty[$, G(t) est l'aire, en unité d'aire,de la parie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=t$, donc G(t) croît lorsque t croît et G est croissante sur $[0;+\infty[$.

. G(t)= $\int_0^t g(u)\,du$ donc G est la primitive de g sur ℝ, vérifiant $G(0)=0$ donc G est dérivable sur ℝ et $G'(t)=g(t)$. $\mathscr{C}_g$ est contenue dans le demi plan $y>0$ donc pour tout nombre réel t $g(t)>0$ et G est croissante sur ℝ.

2. G(1) est l'aire de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.



Cette partie est contenue dans dans un polygone constitué de 9 rectangles d'aire donc $G(1)\leqslant 0{,}9$.

3. Si $t<0$ alors $G(t)=-\int_t^0 g(u)\,du$.

g est positive sur ℝ donc $\int_t^0 g(u)\,du \geqslant 0$ et G(t) < 0.

La fonction G n'est pas toujours positive.

Partie B

1. Pour tout nombre réel u, $g(u)=e^{-u^2}$.

1.a. $\lim\limits_{u\to+\infty} -u^2=-\infty$, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} g(u)=0$.

De même $\lim\limits_{u\to-\infty} g(u)=-\infty$.

1.b. $(-u^2)'=-2u$ $g'(u)=-2u\,e^{-u^2}$.

Le signe de $g'(u)$ esu le signe de -u.

Tableau de variations de g

u	$-\infty$		0		$+\infty$
g(u)		+	0	—	
g'(u)	0	↗	1	↘	0

1.c. Le maximum de g est $g(0)=1$, donc $g(1)\leqslant g(0)=1$.

2.a. On compte le nombre de points situés en dessous (ou au dessus), on obtient 77 (ou (23).

$f=\frac{77}{100}=$ **0,77.**

2.b.

```
c ← 0
Pour i variant de 1 à n faire
    x ← ALEA
    y ← ALEA
    Si y ≤ g(x) alors
        c ← c+1
    Fin SI
Fin Pour
f ← c/n
```

2.c. J intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %.

$J=\left[0{,}757-\frac{1}{\sqrt{1000}};0{,}757+\frac{1}{\sqrt{1000}}\right]$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{1000}}=0{,}032$ à 10^{-3} près

J=[0,725;0,789]

Partie C

1. Pour tout réel $u\geqslant 1$, $\quad g(u)\leqslant\frac{1}{u^2}$

donc pour tout réel $t\geqslant 1$ $\quad \int_1^t g(u)\,du \leqslant \int_1^t \frac{1}{u^2}\,du$.

$h(u)=\frac{1}{u^2}$ $\qquad H(u)=-\frac{1}{u}$ $\qquad$ H est une primitive de h sur $[1;+\infty[$.

$\int_1^t \frac{1}{u^2}\,du = H(t)-H(1)= -\frac{1}{t}+1$ $\quad$ et $\quad \int_1^t g(u)\,du \leqslant 1-\frac{1}{t}$.

2. Pour tout réel $t\geqslant 1$, $G(t)=\int_0^t g(u)\,du = \int_0^1 g(u)\,du + \int_1^t g(u)\,du$.

$0\leqslant g(u)\leqslant 1$ $\quad$ donc $\quad \int_0^1 g(u)\,du \leqslant \int_0^1 1\,du = 1$

$G(t)\leqslant 1+1-\frac{1}{t} \quad\Leftrightarrow\quad G(t)\leqslant 2-\frac{1}{t}$.

Si G admet L pour limite en $+\infty$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} G(t) \leqslant \lim\limits_{t\to+\infty}\left(2-\frac{1}{t}\right)=2$.

Donc $L\leqslant 2$.