EXERCICE 3 — 5 points

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. Soit m un nombre réel et soit l'équation (E) : $2z^2+(m-5)z+m=0$.

1.a. Affirmation 1 :

« Pour m=4, l'équation (E) admet deux solutions réelles. »

1.b. Affirmation 2 :

« Il n'existe qu'une seule valeur de m telle que (E) admette deux solutions complexes qui soient des imaginaires purs. »

2. Dans le plan complexe, on considère l'ensemble S des points M d'affixe z vérifiant :

$|z-6|=|z+5i|$

Affirmation 3 :

« L'ensemble S est un cercle. »

3. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On note d la droite dont une représentation paramétrique est :

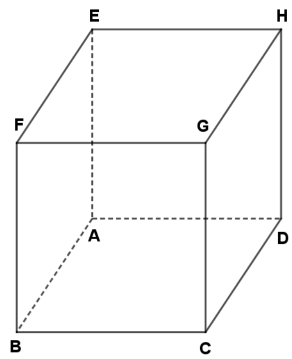
$$d : \begin{cases} x=-1+t \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases} \quad t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

On note d' la droite passant par le point $B(4;4;-6)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(5;2;-9)$

Affirmation 4 :

« Les droites d et d' sont coplanaires. »

4. On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.



Affirmation 5 :

« Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur normal au plan (ADG). »

CORRECTION

1. (E) : $2z^2+(m-5)z+m=0$.

1.a. Affirmation 1 : FAUSSE

Justification

Pour $m=4$ (E) : $2z^2-z+4=0$

$\Delta=(-1)^2-4\times2\times4=-31<0$

L'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées.

1.b. Affirmation 2 : VRAIE

Justification

L'équation $az^2+bz+c=0$ (avec a réel non nul, b et c réels) admet deux solutions complexes si et seulement si $\Delta<0$, les solutions sont alors : $z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

z_1 et z_2 sont des imaginaires purs si et seulement si : $\frac{-b}{2a}=0$.

Pour (E) $b=0 \Leftrightarrow m-5=0 \Leftrightarrow m=5$.

Pour $m=5$ (E) : $2z^2+5=0$

$z_1=-i\sqrt{\frac{5}{2}}$ et $z_2=+i\sqrt{\frac{5}{2}}$

5 est donc la seule valeur de m telle que (E) admette deux solutions complexes qui sont des imaginaires purs.

2. Affirmation 3 : FAUSSE

Justification

On considère les points A(6) et B(-5i) et M(z).

$\overrightarrow{AM}(z-6)$ $AM=|z-6|$ $\overrightarrow{BM}(z+5i)$ $BM=|z+5i|$

$|z-6|=|z+5i| \Leftrightarrow AM=BM \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB] donc S est une droite et non un cercle.

3. Affirmation 4 : FAUSSE

Justification

d : $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$ d est la droite passant par A(-1;2;3) et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-1;1)$.

d' est la droite passant par B(4;4;-6) et de vecteur directeur $\vec{v}(5;2;-9)$ d' : $\begin{cases} x=4+5t' \\ y=4+2t' \\ z=-6-9t' \end{cases}$ t' décrit $\mathbb{R}$

Les droites d et d' ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Pour déterminer si es droites d et d' sont sécantes ou non coplanaires on résout le système :

$$\begin{cases} -1+t=4-t' \\ 2-t=4+2t' \\ 3+t=-6-9t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+t'=5 \\ t+2t'=-2 \\ t+9t'=-9 \end{cases}$$

En considérant le système constitué des deux premières équations :

$t'=-7$ et $t=12$

Pour la troisième équation : $t+9t'=12-63=-51\neq-9$

les droites d et d' ne sont pas sécantes donc sont non coplanaires.

4. Affirmation 5 : VRAIE

Justification

ABCDEFGH est un cube donc (AB) est orthogonale au plan (ADE) donc orthogonale à toute droite contenue dans ce plan. (AB) est orthogonale à (DE).

Le plan (ABG) est égal au plan (ABH).

[AH] et [DE] sont les diagonales du carré ADHE donc (AH) et (DE) sont orthogonales.
(DE) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BAG) : les droites (AB) et (AH).
(DE) est donc orthogonale au plan (ABG).

Conclusion

$\overrightarrow{DE}$ est un vecteur normal à (ABG).