EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;4] par $f(x)=\dfrac{2+3x}{4+x}$.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0=3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0;4].

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 3$.

4.a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4.b. On appelle L la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité : $L=\dfrac{2+3L}{4+L}$.

4.c. Déterminer la valeur de la limite L.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :
$v_0=0{,}1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=f(v_n)$.

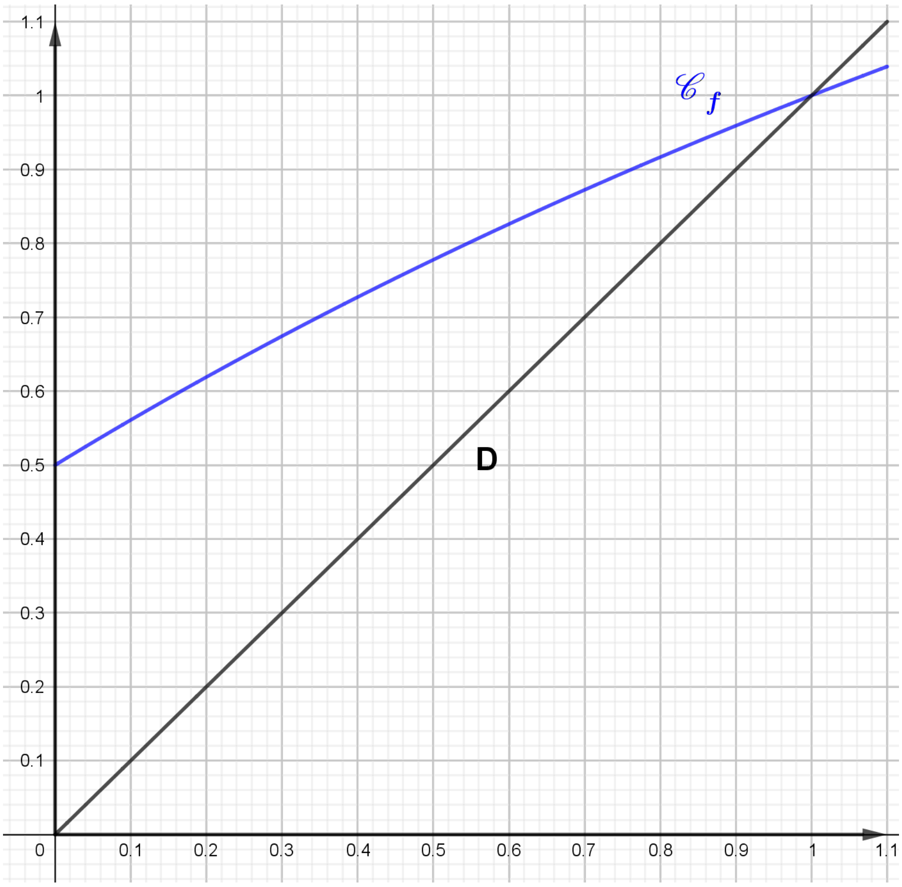
1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y=x$.
Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe à rendre avec la copie.**
Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

2.a. Montrer que pour tout entier naturel n, $1-v_{n+1}=\left(\dfrac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n)$.

2.b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0\leqslant 1-v_n\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa taille.

ANNEXE
à rendre avec la copie



CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;4], $f(x)=\frac{2+3x}{4+x}$.

$u_0=3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. $u_1=\frac{2+3u_0}{4+u_0}=\frac{2+9}{4+3}=\frac{11}{7}$

2. f est dérivable sur [0;4].

$f'(x)=\frac{(4+x)\times 3-(2+3x)\times 1}{(4+x)2}=\frac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2}=\frac{10}{(4+x)^2}>0$

donc f est croissante sur [0;4].

3. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 3$.

. <u>Initialisation</u>

$u_0=3$ et $u_1=\frac{11}{7}$ donc $1\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant 3$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

. <u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 3$ et on doit démontrer que $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$.

f est croissante sur [0;4] donc :

Si $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$ alors $f(1)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)\leqslant f(3)$

$f(1)=1$; $f(u_{n+1})=u_{n+2}$; $f(u_n)=u_{n+1}$; $f(3)=\frac{11}{7}\leqslant 3$.

Donc $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$

. <u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence, nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 3$.

4.a. Pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.

La suite (u_n) est donc convergente.

4.b. $u_{n+1}=\frac{2+u_n}{4+u_n}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n=L$ (appartenant à [1;3])

f est continue sur [0;4]

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2+3u_n}{4+u_n}\right)=\frac{2+3L}{4+L}$

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=L$

<u>Conséquence</u>

$L=\frac{2+3L}{4+L}$.

4.c. L appartient à [0;4]

$L=\frac{2+3L}{4+L} \Leftrightarrow L(4+L)=2+3L \Leftrightarrow 4L+L^2=2+3L \Leftrightarrow L^2+L-2=0$

$\Delta=1^2+4\times 2\times 1=9=3^2$ $L_1=\frac{-1+3}{2}=1$ $L_2=\frac{-1-3}{2}=-2$

1 appartient à [0;4], -2 n'appartient pas à [0;4] donc **L=1.**

Partie B

$v_0=0,1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=f(v_n)$.

1. v_1 est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $v_0=0,1$.
v_1 est l'abscisse du point de D d'ordonnée v_1.
v_2 est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse v_1.
v_2 est l'abscisse du point de D d'ordonnée v_2.
v_3 est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse v_2.
v_3 est l »abscisse du point de D d'ordonnée v_3.
On effectue les constructions sur la feuille donnée en annexe.

2.a. Pour tout entier naturel n :

$$1-v_{n+1}=1-\frac{2+3v_n}{4+v_n}=\frac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n}=\frac{2-2v_n}{4+v_n}=\left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n)$$

2.b. On peut démontrer facilement en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n\geqslant 0$.

Donc $4+v_n\geqslant 4$ et $0<\frac{1}{4+v_n}\leqslant\frac{1}{4}$

Conséquence :

$0<\frac{2}{4+v_n}\leqslant\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $0\leqslant 1-v_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

. <u>Initialisation</u>

$v_0=0,1$ $\quad 1-v_0=1-0,1=0,9$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ $\quad$ donc $0\leqslant 1-v_0\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^0$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

. <u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $0\leqslant 1-v_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et on doit démontrer que $0\leqslant 1-v_{n+1}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Or $1-v_{n+1}=\left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n)$ (produit de deux nombres positifs).

Et $0\leqslant\frac{1}{4+v_n}\leqslant\frac{1}{2}$.

Donc $1-v_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conséquence :

$0\leqslant 1-v_{n+1}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

. <u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $0\leqslant 1-v_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. $0\leqslant\frac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$. Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-v_n)=0$

donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$.

La suite (v_n) converge vers 1.

ANNEXE
à rendre avec la copie