EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un laboratoire étudie l'évolution d'une population d'insectes parasites de plantes.
Cette évolution comporte deux stades : un stade larvaire et un stade adulte qui est le seul au cours duquel les insectes peuvent se reproduire.
L'observation de l'évolution de cette population conduit à proposer le modèle suivant.
Chaque semaine :
. Chaque adulte donne naissance à 2 larves puis 75 % des adultes meurent.
. 25 % des larves meurent et 50 % des larves deviennent adultes.
Pour tout entier naturel n, on note l_n le nombre de larves et a_n le nombre d'adultes au bout de n semaines.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la matrice colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} l_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=AX_n$ où A est la matrice : $A=\begin{pmatrix} 0{,}25 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

2. On note U et V les matrices colonnes : $U=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, où a est un nombre réel.

2.a. Montrer que $AU=1{,}25U$.
2.b. Déterminer le réel a tel que $AV=-0{,}75V$.

Dans les questions 3 et 4, le réel a est fixé de sorte qu'il est la solution de $AV=-0{,}75V$.

3. On admet qu'il existe deux réels α et β tels que $X_0=\alpha U+\beta V$ et $\alpha>0$.
3.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n=\alpha(1{,}25)^n U+\beta(-0{,}75)^n V$.
3.b. En déduire que, pour toutentier naturel n : $\begin{cases} l_n= 2(1{,}25)^n(\alpha-\beta(-0{,}6)^n) \\ a_n= (1{,}25)^n(\alpha+\beta(-0{,}6)^n) \end{cases}$.

4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{l_n}{a_n}=2$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

1. On considère l'équation (E) : $19x-6y=1$. Déterminer le nombre de couples d'entiers $(x;y)$ solutions de l'équation (E) et vérifiant $2000\leqslant x\leqslant 2100$.

2. Soit n un entier naturel. Montrer que les entiers (2n+3) et (n+3) sont premiers entre eux si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.

CORRECTION

Partie A

1. Le nombre de larves l_{n+1} de la semaine : n+1 est égal au nombre de larves de la semaine n : l_n , diminué des 25 % de larves qui meurent : $0{,}25 l_n$ et aussi diminué des 50 % de larves qui deviennent adultes : $0{,}5 l_n$ et augmenté de 2 larves par adultes : $2a_n$.

$l_{n+1}=l_n-0{,}25 l_n-0{,}5 l_n+2a_n=0{,}25 l_n+2a_n$.

Le nombre d'adultes a_{n+1} de la semaine n+1 est égal au nombre d'adultes de la semaine n : a_n , diminué des 75 % des adultes qui meurent : $0{,}75 a_n$ et augmenté des 50 % de larves qui deviennent adultes : $0{,}5 l_n$

$a_{n+1}=a_n-0{,}75 a_n+0{,}5 l_n=0{,}5 l_n+0{,}25 a_n$.

$$\begin{cases} l_{n+1}=0{,}25 l_n+2a_n \\ a_{n+1}=0{,}5 l_n+0{,}25 a_n \end{cases} \Leftrightarrow \quad X_{n+1}=AX_n \quad \text{avec } A=\begin{pmatrix} 0{,}25 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

2.a. $AU=\begin{pmatrix} 0{,}25 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5+2 \\ 1+0{,}25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}=1{,}25\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=1{,}25U.$

2.b. $AV=\begin{pmatrix} 0{,}25 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}25a+2 \\ 0{,}5a+0{,}25 \end{pmatrix}.$

$$AV=-0{,}75V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}25a+2 \\ 0{,}5a+0{,}25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}75a \\ -0{,}75 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}25a+2=-0{,}75a \\ 0{,}5a+0{,}25=-0{,}75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ 0{,}5a=-1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \{a=-2$

3.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$X_n=\alpha(1{,}25)^n U+\beta(-0{,}75)^n V$.

Initialisation

Pour n=0, on a : $X_0=\alpha U+\beta V$ et $(1{,}25)^0=1$ et $(-0{,}75)^0=1$ donc $X_0=\alpha(1{,}25)^0 U+\beta(-0{,}75)^0 V$

La propriété est vérifiée si $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que :
$X_n=\alpha(1{,}25)^n U+\beta(-0{,}75)^n V$ et on doit démontrer que : $X_{n+1}=\alpha(1{,}25)^{n+1} U+\beta(-0{,}75)^{n+1} V$.

Or $X_{n+1}=AX_n=\alpha(1{,}25)^n AU+\beta(-0{,}75)^n AV=\alpha(1{,}25)^n(1{,}25U)+\beta(-0{,}75)^n(-0{,}75)V$

$X_{n+1}=\alpha(1{,}25)^{n+1} U+\beta(-0{,}75)^{n+1} V$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a :
$X_n=\alpha(1{,}25)^n U+\beta(-0{,}75)^n V$.

3.b. $X_n=\begin{pmatrix} l_n \\ a_n \end{pmatrix}=\alpha(1{,}25)^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\beta(-0{,}75)^n\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} l_n=2\alpha(1{,}25)^n-2\beta(-0{,}75)^n \\ a_n=\alpha(1{,}25)^n+\beta(-0{,}75)^n \end{cases}$

$$l_n=2(1{,}25)^n\left(\alpha-\beta\left(-\frac{0{,}75}{1{,}25}\right)^n\right)=2(1{,}25)^n(\alpha-\beta(-0{,}6)^n)$$

$$a_n=(1{,}25)^n\left(\alpha+\beta\left(-\frac{0{,}75}{1{,}25}\right)^n\right)=(1{,}25)^n(\alpha+\beta(-0{,}6)^n)$$

$$\begin{cases} l_n=2(1{,}25)^n(\alpha-\beta(-0{,}6)^n) \\ a_n=(1{,}25)^n(\alpha+\beta(-0{,}6)^n) \end{cases}$$

4. $\dfrac{l_n}{a_n}=\dfrac{2(\alpha-\beta(-0{,}6)^n)}{\alpha+\beta(-0{,}6)^n}$

$-1<-0{,}6<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0{,}6)^n=0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{l_n}{a_n}=\dfrac{2\alpha}{\alpha}=2$ (remarque : $\alpha>0$).

À long terme, chaque semaine le nombre de larves sera le double du nombre d'adultes.

Partie B

1. $(E):\ 19x-6y=1$

On remarque que le couple (1;3) est une solution particulière de l'équation (E), car $19\times1-6\times3=1$.

(E) $\Leftrightarrow$ $19x-6y=19\times1-6\times3$ $\Leftrightarrow$ $19(x-1)=6(y-3)$

6 divise $19(x-1)$ et 6 est premier avec 19 donc le théorème de Gauss nous permet d'affirmer que 6 divise $x-1$ donc il existe un entier relatif k tel que $x-1=6k$ $\Leftrightarrow$ $x=6k+1$.

Pour tout entier relatif k vérifiant : $x-1=6k$

$19(x-1)=6(y-3)$ $\Leftrightarrow$ $19\times6k=6(y-3)$ $\Leftrightarrow$ $19k=y-3$ $\Leftrightarrow$ $y=19k+3$.

L'ensemble des couples solutions de l'équation (E) et l'ensemble des couples $(6k+1\,;19k+3)$ avec $k\in Z$

$2000\leqslant x\leqslant2100$ $\Leftrightarrow$ $2000\leqslant6k+1\leqslant2100$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1999}{6}\leqslant k\leqslant\dfrac{2099}{6}$

$\dfrac{1999}{6}=333{,}2$ à 10^{-1} près $\dfrac{2099}{6}=349{,}8$ à 10^{-1} près

k est un entier et $334\leqslant k\leqslant349$.

Il existe donc **16** couples d'entiers solutions de l'équation (E) vérifiant $1\,2000\leqslant x\leqslant2100$.

2. On remarque que $2\times(n+3)-1\times(2n+3)=3$

Tout diviseur commun de (n+3) et (2n+3) est un diviseur de 3.

3 est un nombre premier, le PGCD de (n+3) et (2n+3) est égal à 1 ou à 3.

Or n+3 est divisible par 3 $\Leftrightarrow$ $n+3\equiv0\ (3)$ $\Leftrightarrow$ $n\equiv0\ (3)$ $\Leftrightarrow$ n est divisible par 3

D'autre part, si n est divisible par 3 alors $n=3p$ (p est un entier naturel car n est un entier naturel) et $2n+3=2\times3p+3=3\times(2p+1)$ (2p+1 est un entier naturel) donc 2n+3 est divisible par 3.

Conclusion

Le PGCD de (n+3) et (2n+3) est égal à 3 si et seulement si n est un multiple de 3.

Si n n'est pas un multiple de 3 alors le PGCD des nombres (n+3) et (2n+3) est égal à 1, ces nombres sont donc premiers entre eux.

Les nombres (n+3) et (2n+3) sont premiers entre eux si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.