EXERCICE 1 5 points

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Une société de location de voitures s'intéresse à l'état mécanique de son parc automobile afin d'anticiper les frais d'entretien.

On dispose des données suivantes :

. 20 % des voitures sont sous garantie ;

. pour 1 % des voitures sous garantie, une réparation est nécessaire ;

. pour 10 % de celles qui ne sont plus sous garantie, une réparation est nécessaire.

On choisit une voiture au hasard dans le parc et on considère les événements suivants :

. G : « la voiture est sous garantie » ;

. R : « une réparation est nécessaire ».

1.a. Traduire la situation par un arbre pondéré.

1.b. Calculer la probabilité que la voiture choisie soit sous garantie et nécessite une réparation.

1.c. Justifier que $P(R)=0{,}082$.

1.d. Il s'avère que la voiture choisie nécessite une réparation.

Quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie ? On arrondira le résultat à 10^{-3} .

2. La société de location fait appel à un garage pour l'entretien de son parc automobile.

L'entretien consiste à une révision à laquelle s'ajoutent d'éventuelles réparations. Les conditions commerciales du garage sont les suivantes :

. si la voiture est encore sous garantie, l'entretien est gratuit ;

. si la voiture n'est plus sous garantie, l'entretien est facturé de la manière suivante : la révision coûte 100 € et, si une réparation est nécessaire, il faut ajouter 400 €.

Sachant que son parc automobile compte 2500 voitures, est-il raisonnable pour la société de location de prévoir un budget annuel de 250 000 euros pour l'entretien de l'ensemble des voitures ?

On pourra introduire la variable aléatoire X qui représente le coût d'entretien d'une voiture.

Partie B

La société de location propose à ses clients deux contrats de location : un contrat de courte durée (inférieure à 2 jours) et un contrat de longue durée (de 3 à 7 jours).

La directrice de cette société affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée..

Sur les 600 derniers contrats signés l'année précédente, 550 étaient des contrats de courte durée.

1. En supposant que l'affirmation de la directrice est correcte, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des contrats de courte durée.

2. Que peut-on penser de l'affirmation de la directrice ?

Partie C

On modélise le nombre de kilomètres parcourus par les clients louant une voiture pour une semaine par une variable aléatoire Y suivant la loi normale d'espérance $\mu = 450$ et d'écart-type $\sigma = 100$.

1. Quelle est la probabilité que le client louant la voiture pour une semaine roule entre 500 km et 600 km ? On arrondira à 10^{-3}.

2. La société de location souhaite faire une offre promotionnelle aux 15 % de ses clients parcourant le moins de kilomètres en une semaine.

En dessous de quel kilométrage hebdomadaire, arrondi à l'unité, un client sera-t-il concerné par cet offre ?

CORRECTION

Partie A

1.a. L'énoncé précise :

. 20 % des voitures sont sous garantie donc :

$P(G)=0{,}2$ et $P(\bar{G})=1-0{,}2=0{,}8$

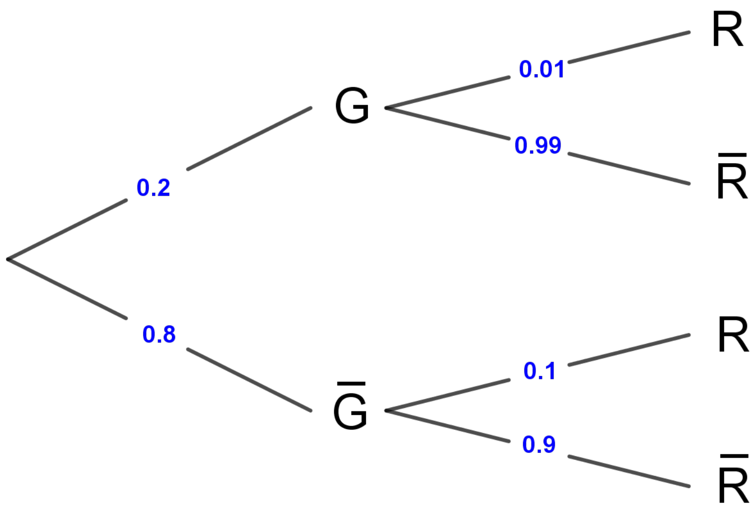
. pour 1 % des voitures sous garantie, une réparation est nécessaire donc :

$P_G(R)=0{,}01$ et $P_G(\bar{R})=1-0{,}01=0{,}99$

. pour 10 % des voitures qui ne sont pas sous garantie, une réparation est nécessaire donc

$P_{\bar{G}}(R)=0{,}1$ et $P_{\bar{G}}(\bar{R})=1-0{,}1=0{,}9$

. On obtient l'arbre pondéré suivant :



1.b. On nous demande de calculer $P(G\cap R)$.

$P(G\cap R)=P(G)\times P_G(R)=0{,}2\times 0{,}01$ = **0,002**

1.c. En utilisant la formule des probabilités totales ou l'arbre pondéré, on obtient :

$P(R)=P(G\cap R)+P(\bar{G}\cap R)=P(G)\times P_G(R)+P(\bar{G})\times P_{\bar{G}}(R)$

$P(R)=0{,}002+0{,}8\times 0{,}1=0{,}002+0{,}08$ = **0,082**

1.d. On nous demande de calculer $P_R(G)$

$P_R(G)=\frac{P(R\cap G)}{P(R)}=\frac{0{,}002}{0{,}082}=\frac{2}{82}=\frac{1}{41}$ = **0,024** à 10^{-3} près

2. Les événements G, $\bar{G}\cap\bar{R}$ et $\bar{G}\cap R$ forment une partition de l'univers.

Soit X la variable aléatoire qui représente le coût d'entretien d'une voiture.

Si la voiture est sous garantie alors X=0 (euro), si la voiture n'est pas sous garantie et ne nécessite pas une réparation alors X=100 (euros), si la voiture n'est pas sous garantie et nécessite une réparation alors X=100+400=500 (euros).

On a : $P(X=0)=P(G)=0{,}2$ et $P(X=100)=P(\bar{G}\cap\bar{R})=P(\bar{G})\times P_{\bar{G}}(\bar{R})=0{,}8\times 0{,}9=0{,}72$

et $P(X=500)=P(\bar{G}\cap R)=P(\bar{G})\times P_{\bar{G}}(R)=0{,}8\times 0{,}1=0{,}08$.

On vérifie que : $P(X=0)+P(X=100)+P(500)=1$.

On donne la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

x_i	0	100	500
$P(x_i)$	0.2	0.72	0.08

Le coût d'entretien moyen d'une voiture est égal à l'espérance mathématique de X.
$E(X)=0\times 0{,}2+100\times 0{,}72+500\times 0{,}08=72+40=112$.
On peut estimer pour le coût d'entretien annuel de 2500 voitures : $112\times 2500=280000$ €
Conséquence
Il n'est pas raisonnable de ne prévoir qu'un budget annuel de 250 000 €.

Partie B

1. L'affirmation de la directrice donne : p=0,8.
$n=600\geqslant 30$ $np=480\geqslant 5$ $n(1-p)=120\geqslant 5$
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des contrats de courte durée est :
$$I=\left[0{,}8-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}8\times 0{,}2}{600}};0{,}8+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}8\times 0{,}2}{600}}\right]$$
$1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}8\times 0{,}2}{600}}=0{,}032$ à 10^{-3} près.
I=[0,768;0,832]

2. La fréquence observée sur les 600 derniers contrats est : $f=\frac{550}{600}=\frac{55}{60}=\frac{11}{12}=0{,}91$ à 10^{-2} près.
0,91 n'appartient pas à I.
Conséquence
Au seuil de 95 %, l'affirmation de la directrice est **fausse.**

Partie C

1. Y suit la loi normale d'espérance $\mu=450$ et d'écart-type $\sigma=100$.
En utilisant la calculatrice , on obtient :
$P(500\leqslant Y\leqslant 600)$ = **0,242** à 10^{-3} près.

2. À l'aide de la calculatrice, on détermine la valeur de a telle que $P(Y\leqslant a)=0{,}15$.
On obtient : a=346 à l'unité près
Conclusion
En-dessous de **346 kilomètres** hebdomadaire, un client sera concerné par l'offre.