EXERCICE 2 — 6 points

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(x+2)e^{x-4}-2$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.
Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
6. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-x^2e^{x-4}$.
1. Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
On admet par ailleurs que, pour tout réel x, $f'(x)=-x\,g(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Partie C : Aire d'un domaine

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=x^2$ et les droites d'équations x=0 et x=4.
1. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{P}$.
2. On admet qu'une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-(x^2-2x+2)e^{x-4}.$$

Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en unité d'aire. On donnera la valeur exacte.

CORRECTION

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Pour tout nombre réel x : $g(x)=(x+2)e^{x-4}-2$.

1. $\lim_{x\to+\infty}(x-4)=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}e^{x-4}=+\infty$

d'autre part $\lim_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{x+4}=+\infty$

Conséquence :

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

2. $(x+2)e^{x-4}=(x-4)e^{x-4}+6e^{x-4}$

$\lim_{x\to-\infty}(x-4)=-\infty$ et $\lim_{X\to-\infty}Xe^{X}=0$ donc $\lim_{x\to-\infty}(x-4)e^{x-4}=0$

d'autre part $\lim_{x\to-\infty}e^{x-4}=0$ donc $\lim_{x\to-\infty}(x+2)e^{x-4}=0$

Conséquence :

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-2$.

3. $(e^{u})'=u'e^{u}$ donc $(e^{x-4})'=1\times e^{x-4}=e^{x-4}$

$g'(x)=1\times e^{x-4}+(x+2)e^{x-4}=(x+3)e^{x-4}$

Pour tout nombre réel x, $e^{x-4}>0$ donc le signe de $g'(x)$ est le signe de (x-3).

Tableau de variation de g

x	-∞		-3		+∞
g'(x)		−	0	+	
g(x)	-2	↘	m	↗	+∞

$m=g(-3)=-e^{-7}-2=-2{,}001$ à 10^{-3} près.

4. g est strictement décroissante sur $]-\infty;-3]$ donc pour tout x de l'intervalle $]-\infty;-3]$, $g(x)<-2$ et l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty;-3]$.

g est continue et strictement croissante sur $[-3;+\infty[$ et 0 appartient à l'intervalle image $[m;+\infty[$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-3;+\infty[$.

x	-∞		-3		α		+∞
g'(x)		−	0	+			
g(x)	-2	↘	m	↗	0	↗	+∞

5. En utilisant les variation de g , on obtient pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty;\alpha[$ $g(x)<0$ et pour nombre de l'intervalle $]\alpha;+\infty[$ $g(x)>0$.

On donne le résultat sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g(x)		−	0	+	

6. En utilisant la calculatrice, on obtient pour encadrement d'amplitude 10^{-3} de α :
$3{,}069<\alpha<3{,}070$.

Partie B : Étude dela fonction f

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x)=x^2-x^2e^{x-4}$.

1. Pour tout nombre réel x, $f(x)=x^2(1-e^{x-4})$
$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2=0 \text{ ou } 1-e^{x-4}=0)$
$x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$
$1-e^{x-4}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1=e^{x-4} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1)=x-4 \quad \Leftrightarrow \quad x=4$
$\mathscr{S}=\{0;4\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=0$.

2. Calcul de $f'(x)$ (*non demandé*)
Pour tout nombre réel x, $f(x)=x^2-x^2e^{x-4}$.
$f'(x)=2x-2xe^{x-4}-x^2e^{x-4}=-x(-2+2e^{x-4}+xe^{x-4})=-x[-2+(2+x)e^{x-4}]$
$f'(x)=-xg(x)$.

. On donne les variations de f sous la forme d'un tableau

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
-x		+	0	−		−	
g(x)		−		−	0	+	
f '(x)		−	0	+	0	−	
f(x)		↘		↗		↘	

3. f admet un maximum sur $[0;+\infty[$ pour $x=\alpha$
$g(\alpha)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha+2)e^{\alpha-4}-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\alpha-4}=\dfrac{2}{\alpha+2}$
$f(\alpha)=\alpha^2-\alpha^2e^{\alpha-4}=\alpha^2-\dfrac{2\alpha^2}{\alpha+2}=\dfrac{\alpha^3-\mp2\alpha^2-2\alpha^2}{\alpha+2}=\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$

Partie C : Aire d'un domaine

1. $\mathscr{P}$ est la courbe représentative de la fonction h définie sur ℝ par $h(x)=x^2$.
Pour tout nombre réel x $h(x)-f(x)=x^2-x^2+x^2e^{x-4}=x^2e^{x-4}\geqslant0$.
$\mathscr{P}$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$ sur ℝ.

2. $\mathscr{D}$ est le domaine plan compris entre $\mathscr{P}$, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations x=0 et x=4.
On note $\mathscr{A}$ l'aire de $\mathscr{D}$, en unité d'aire.

$\mathscr{A}=\int_0^4 (\mathrm{h}(x)-\mathrm{f}(x))\,\mathrm{d}x$

F définie par $\mathrm{F}(x)=\frac{x^3}{3}-(x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x-4}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

H définie par $\mathrm{H}(x)=\frac{x^3}{3}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

Conséquence :
H – F est une primitive de h - f sur $\mathbb{R}$.
$(\mathrm{H}-\mathrm{F})(x)=\mathrm{H}(x)-\mathrm{F}(x)=(x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x-4}$
donc $\mathscr{A}=(\mathrm{H}-\mathrm{F})(4)-(\mathrm{H}-\mathrm{F})(0)=(16-8+2)\mathrm{e}^0-2\mathrm{e}^{-4}=10-2\mathrm{e}^{-4}$.
On joint une représentation graphique sur [0;4] **(non demandée).**
$\mathscr{P}$ en bleu, $\mathscr{C}_f$ en rouge et $\mathscr{D}$ en jaune.