EXERCICE 3 — 4 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.
Pour les questions 1 à 3 , on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z :
$z(z^2-8z+32)=0$
Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

2. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient :
$|z-3|=|z+3|$
Affirmation 2 : l'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

3. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :
$z_n=(1-i\sqrt{3})^n$
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.
Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n, les points M_n , O et M_{n+3} sont alignés.

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x :
$\sin(x)(2\cos^2(x)-1)=0$
Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi;+\pi]$ qui sont $-\frac{\pi}{4}$; 0 ;$\frac{\pi}{4}$; et π .

CORRECTION

1. Affirmation 1 : **VRAIE**

Justification

(E) $\Leftrightarrow$ $(z=0 \text{ ou } z^2-8z+32=0)$

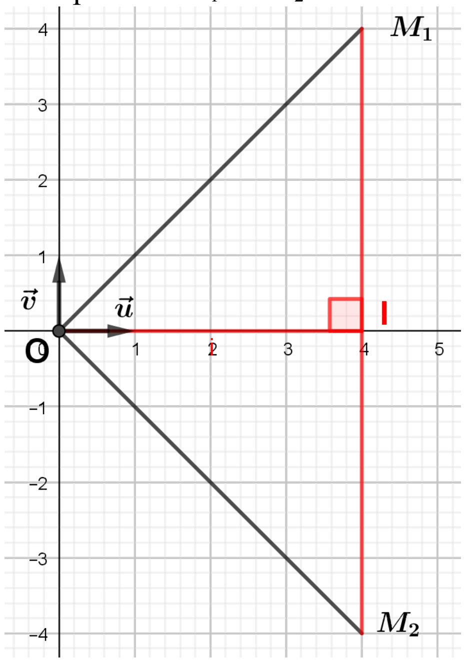
. z=0 O est le point d'affixe 0

. $z^2-8z+32=0$

$\Delta=64-4\times32=-64=64i^2=(8i)^2$

$z_1=\frac{8+8i}{2}=4+4i$ $\qquad z_2=\bar{z}_1=4-4i$

M_1 et M_2 sont les points d'affixes respectives z_1 et z_2.



M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à (x'x).

$I(4)$ I est le milieu de $[M_1M_2]$ et (OI) et (M_1M_2) sont perpendiculaires.

L'aire du triangle OM_1M_2 en unité d'aire est égale à $\frac{OI\times M_1M_2}{2}$.

$OI=4$ et $\overrightarrow{M_1M_2}(-8i)$ on obtient $M_1M_2=8$ donc l'aire du triangle OM_1M_2 est : $\frac{4\times8}{2}=16$ U.A.

2. Affirmation 2 : **FAUSSE**

Justification

. Première méthode :

On considère les points M, A et B d'affixes respectives z, 3 et -3.

$\overrightarrow{AM}(z-3)$ $\qquad AM=|z-3|$

$\overrightarrow{BM}(z+3)$ $\qquad BM=|z+3|$

$|z-3|=|z+3| \Leftrightarrow AM=BM$

donc $\mathcal{E}$ est la médiatrice de [AB] (l'axe des ordonnées) et l'affirmation 2 est fausse.

. Deuxième méthode

$z=x+iy$ x et y sont des nombres réels.

$|z-3|=|z+3| \Leftrightarrow |x-3+iy|=|x+3+iy| \Leftrightarrow |x-3+iy|^2=|x+3+iy|^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=(x+3)^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2=x^2+6x+9+y^2 \Leftrightarrow -12x=0 \Leftrightarrow x=0$

donc $\mathcal{E}$ est la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) et l'affirmation 2 est fausse.

3. Affirmation 3 : **VRAIE**

justification

Pour tout entier naturel n :

$z_n=(1-i\sqrt{3})^n$ (on convient que $z_0=1$)

$z_{n+3}=(1-i\sqrt{3})^{n+3}=(1-i\sqrt{3})^3\times z_n$

$(1-i\sqrt{3})^2=1-2i\sqrt{3}-3=-2-2i\sqrt{3}$

$(1-i\sqrt{3})^3=(-2-2i\sqrt{3})\times(1-i\sqrt{3})=-2-2i\sqrt{3}+2i\sqrt{3}-2\times 3=-8$

$z_{n+3}=-8z_n$

$(\overrightarrow{OM_n};\overrightarrow{OM_{n+3}})=(\vec{u};\overrightarrow{OM_{n+3}})-(\vec{u};\overrightarrow{OM_n})\ (2\pi)$

$(\overrightarrow{OM_n};\vec{}\,OM_{n+3})=\arg(z_{n+3})-\arg(z_n)\ (2\pi)$

$\arg(z_{n+3})=\arg(-8z_n)\ (2\pi)$

$\arg(z_{n+3})=\arg(-8)+\arg(z_n)\ (2\pi)$

$\arg(z_{n+3})=\pi+\arg(z_n)\ (2\pi)$

$(\overrightarrow{OM_n};\overrightarrow{OM_{n+3}})=\pi\ (2\pi)$

Les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OM_{n+3}}$ sont colinéaires et les points O, M_n et M_{n+3} sont alignés.

4. Affirmation 4 : **FAUSSE**

Justification

$\sin(x)(2\cos^2(x)-1)=0 \Leftrightarrow \sin(x)(\sqrt{2}\cos(x)-1)(\sqrt{2}\cos(x)+1)=0$.

Les solutions appartement à l'intervalle $]-\pi;+\pi]$,de l'équation $\sin(x)=0$ sont : 0 et π , celles de l'équation $\sqrt{2}\cos(x)-1=0$ sont : $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ et celles de l'équation $\sqrt{2}\cos(x)+1=0$ sont : $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

L'équation proposée admet six solutions appartenant à $]-\pi;+\pi]$.