EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\frac{n_n}{u_n+8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0.11111111
4	2	0.01369863
5	3	0.0017094
6	4	0.00021363
7	5	2.6703E-05
8	6	3.3379E-06
9	7	4.1723E-07
10	8	5.2154E-08
11	9	6.5193E-09
12	10	8.1491E-10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
4. Écrire un algorithme calculant u_{30}.

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n>0$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n=1+\frac{7}{u_n}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{7}{8^{n+1}-1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n<10^{-18}$.
   Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur.

CORRECTION

Partie A : Conjectures

1. On entre dans la cellule B3 la formule : **=B2/(B2+8)**
2. Conjecture : **la suite (u_n) est décroissante.**
3. Conjecture : **la suite (u_n) converge vers 0.**
4. Algorithme proposé :

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 1$
$V \leftarrow 0$
Tant que N<30, faire
    $N \leftarrow N+1$
    $V \leftarrow U+8$
    $U \leftarrow \frac{U}{V}$
Fin Tant que
Afficher : U

Programmation en python

```
print('début de programme')
n=0
u=1
while n<30:
    n=n+1
    v=u+8
    u=u/v
print("n="+str(n),"u="+str(u))
print ("Fin de programme")
```

Exécution du programme

```
début de programme
n=30 u=7.068193710780266e-28
Fin de programme
```

Remarque :
On obtient le même résultat en utilisant le tableur d' OPEN OFFICE.

Partie B : Étude générale

1. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n>0$.
<u>Initialisation :</u>
$u_0=1>0$ donc la propriété est vérifiée pour n=0.
<u>Hérédité</u>
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n>0$ et on doit démontrer que $u_{n+1}>0$.
$u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+8}$ or $u_n>0$ donc $u_n+8>0$ et $u_{n+1}>0$.
<u>Conclusion</u>
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $u_n>0$.
2. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{u_n+8}-u_n=\frac{u_n-u_n^2-8u_n}{u_n+8}=\frac{-u_n^2-7u_n}{u_n+8}$$

On a $u_n+8>0$ et $-u_n^2-7u_n<0$.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n<0$, **la suite (u_n) est strictement décroissante.**

3. Pour tout entier naturel n, $u_n>0$ donc la suite (u_n) est minorée par .
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc **la suite (u_n) est convergente**.
Remarque :
Dans cette question on ne connaît pas la limite de la suite (u_n).

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

Pour tout entier naturel n, $v_n=1+\frac{7}{u_n}$.

1. Pour tout entier naturel :

$$v_{n+1}=1+\frac{7}{u_{n+1}}=1+7\times\frac{u_n+8}{u_n}=1+7+\frac{7\times 8}{u_n}=8\left(1+\frac{7}{u_n}\right)=8v_n$$

(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=1+\frac{7}{u_0}=1+\frac{7}{1}=8$ et de raison q=8.

2. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=8\times 8^n=8^{n+1}$.

$$v_n=1+\frac{7}{u_n}=\frac{u_n+7}{u_n} \Leftrightarrow u_n\times u_n=u_n+7 \Leftrightarrow u_n(v_n-1)=7 \Leftrightarrow u_n=\frac{7}{v_n-1}=\frac{7}{8^{n+1}-1}$$

(on a $8^{n+1}>8$ donc $8^{n+1}-1>0$)

3. $8>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^n=+\infty$ conséquence : $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^{n+1}-1=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7}{8^{n+1}-1}=0$

Conclusion
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

4. $u_n<10^{-18} \Leftrightarrow \frac{7}{8^{n+1}-1}<10^{-18}$ $7\times 10^{18}<8^{n+1}-1 \Leftrightarrow 7\times 10^{18}+1<8^{n+1}$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(7\times 10^{18}+1)<(n+1)\ln(8^{n+1}) \Leftrightarrow \ln(7\times 10^{18}+1)<(n+1)\ln(8)$

$8>1$ donc $\ln(8)>\ln(1)=0$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(7\times 10^{18}+1)}{\ln(8)}<n+1$

En utilisant la calculatrice

$\Leftrightarrow 20,87<n+1$

n est un entier naturel

$21\leqslant n+1 \Leftrightarrow 20\leqslant n$

Conclusion

$n_0=20$

. On peut trouver ce résultat en utilisant un tableur, on obtient (en ne conservant que 5 chiffres significatifs)

$u_{19}=6,0715\,E-18$

$u_{20}=7,5894\,E-19$

. On peut utiliser ce résultat en utilisant un programme python.

Programme

```
print('début de programme')
n=0
u=1
while u>=10**(-18):
    n=n+1
    v=u+8
    u=u/v
print("n="+str(n),"u="+str(u))
print ("Fin de programme")
```

Exécution

```
début de programme
n=20 u=7.589415207398531e-19
Fin de programme
```

Remarque

Si on considère l'inéquation $u_n \leqslant 10^{-100}$.

En utilisant un tableur ou un programme python, on obtient $n_0=111$ et $u_{111}=5{,}0005\,E-111$.

Mais avec un calculatrice élémentaire, on ne peut pas effectuer le calcul $\dfrac{\ln(7\times 10^{-100}-1)}{\ln(8)}$.

Si on résout l'inéquation $u_n \leqslant 10^{-100}$ alors on obtient $7\times 10^{100} \leqslant 8^{n+1}-1$

Les deux membres sont des entiers donc

$\Leftrightarrow \quad 7\times 10^{100} < 8^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(7\times 10^{100}) < \ln(8^{n+1}) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln(7)+100\ln(10)}{\ln(8)} < n+1$

$\dfrac{\ln(7)+100\ln(10)}{\ln(8)} = 111{,}66$ et n est un entier naturel

$\Leftrightarrow \quad 112 \leqslant n+1 \quad \Leftrightarrow \quad 111 \leqslant n$.