EXERCICE 1 5 points

Une entreprise est spécialisée dans la vente de carrelage.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

On suppose dans cette partie que l'entreprise vend des lots de carrelage contenant 25 % de carrelage avec motif et 75 % de carreaux blancs.
Lors d'un contrôle de qualité on observe que :
. 2,25 % des carreaux sont fissurés ;
. 6 % des carreaux avec motifs sont fissurés.
On prélève au hasard un carreau.
On note M l'événement « le carreau a un motif » et F l'événement « le carreau est fissuré ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. On sait que le carreau prélevé est fissuré.
Démontrer que la probabilité qu'il s'agisse d'un carreau avec motif est $\frac{2}{3}$.
3. Calculer $P_{\bar{M}}(F)$, probabilité de F sachant $\bar{M}$.

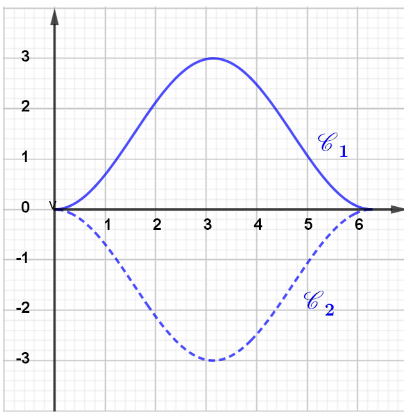
Partie B

On modélise l'épaisseur en millimètre d'un carreau pris au hasard par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu=11$ et d'écart-type σ.
Un carreau est commercialisable si son épaisseur mesure entre 10,1 mm et 11,9 mm.
On sait que 99 % des carreaux sont commercialisables.

1. Démontrer que $P(X<10,1)=0,005$.
2. On introduit la variable Z telle que $Z=\frac{X-11}{\sigma}$.
2.a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire Z.
2.b. Démontrer que $P\left(Z\leqslant-\frac{0,9}{\sigma}\right)=0,005$.
2.c. En déduire la valeur de σ arrondie au centième.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $[0;2\pi]$ par : $f(x)=-1,5\cos(x)+1,5$.
On admet la fonction f est continue sur $[0;2\pi]$.
On note $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. Démontrer que la fonction f est positive sur $[0;2\pi]$.

2. Sur la figure précédente, la courbe tracée en tiretés, notée $\mathcal{C}_2$ est la courbe symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.
La forme d'un carreau est celle de la zone délimitée par les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
On note $\mathcal{A}$ son aire , exprimée en unité d'aire.
Calculer $\mathcal{A}$.

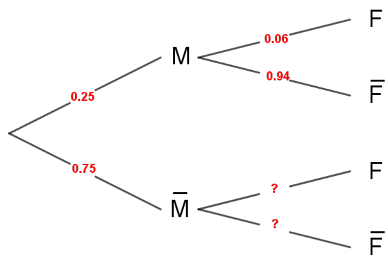
CORRECTION

1. L'entreprise vend des lots de carrelage contenant 25 % de carreaux avec motif et 75 % de carreaux blancs.
Donc $P(M)=0{,}25$ et $P(\bar{M})=0{,}75$.

. 6 % des carreaux avec motif sont fissurés.
Donc $P_M(F)=0{,}06$ et $P_M(\bar{F})=1-0{,}06=0{,}94$

. 2,25 % des carreaux sont fissurés.
Donc P(F)=0,0225.

. Arbre pondéré



2. On nous demande de calculer $P_F(M)$.

$$P_F(M)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{0{,}25\times 0{,}06}{0{,}0225}=\frac{0{,}015}{0{,}0225}=\frac{150}{225}=\frac{2}{3}.$$

3. En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$P(F)=P(M\cap F)+P(\bar{M}\cap F)$

$P(\bar{M}\cap F)=P(F)-P(M\cap F)=0{,}0225-0{,}015=0{,}0075$

$$P_{\bar{M}}(F)=\frac{P(\bar{M}\cap F)}{P(\bar{M})}=\frac{0{,}0075}{0{,}75}=\frac{75}{7500}=0{,}01.$$

On en déduit : $P_{\bar{M}}(\bar{F})=1-0{,}01=0{,}99$ (On peut alors compléter l'arbre pondéré.)

Partie B

1. $P(10{,}1\leqslant X\leqslant 11{,}9)=0{,}99$.
X suit une loi normale d'espérance 11. 10,1=11-0,9 et 11,9=11+0,9.

Donc $P(X<10{,}1)=P(11{,}9<X)=\dfrac{1-0{,}99}{2}$ = **0,005.**

2. $Z=\dfrac{X-11}{\sigma}$ **Z suit la loi normale centrée et réduite.**

$$(10{,}1\leqslant X\leqslant 11{,}9) \Leftrightarrow \left(\frac{10{,}1-11}{\sigma}\leqslant\frac{X-11}{\sigma}\leqslant\frac{11{,}9-11}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{-0{,}9}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\frac{0{,}9}{\sigma}\right)$$

$$P\left(\frac{-0{,}9}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\frac{0{,}9}{\sigma}\right)=0{,}99 \quad \text{donc} \quad P\left(Z<\frac{-0{,}9}{\sigma}\right)=0{,}005.$$

En utilisant la calculatrice, on détermine le nombre réel a tel que $P(Z<a)=0{,}05$.
On obtient : $a=-2{,}5758$.

$$-2{,}5758=\frac{-0{,}9}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma=\frac{0{,}9}{2{,}5758}$$ = **0,35** à 10^{-2} près.

Partie C

f est définie sur $[0;2\pi]$ par $f(x)=-1{,}5\cos(x)+1{,}5$

1. f est dérivable sur $[0;2\pi]$ $\cos'(x)=-\sin(x)$
donc $f'(x)=1,5\sin(x)$
Si $0\leqslant x\leqslant\pi$ alors $\sin(x)\geqslant 0$
Si $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ alors $\sin(x)\leqslant 0$
$f(0)=f(2\pi)=0$ $f(\pi)=3$
<u>Tableau de variation de f</u>

x	0		π		2π
f '(x)					
f(x)	0	↗	3	↘	0

Si $0\leqslant x\leqslant\pi$ alors $f(0)=0\leqslant f(x)$
Si $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ alors $f(x)\geqslant f(2\pi)=0$.
Donc pour tout réel de $[0;2\pi]$, $f(x)\geqslant 0$.

2. f est continue et positive sur $[0;2\pi]$ donc l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_1$ sur $[0;2\pi]$ est égale à : $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.
La fonction F définie sur $[0;2\pi]$ par $F(x)=-1,5\sin(x)+1,5x$ est une primitive de f sur $[0;2\pi]$.
$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = F(2\pi)-F(0)=3\pi$.
$\mathscr{C}_2$ es la courbe symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses donc l'aire de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_2$ sur $[0;2\pi]$ est aussi égale à 3π.
<u>Conclusion</u>
$\mathscr{A}=6\pi$ u.a.

