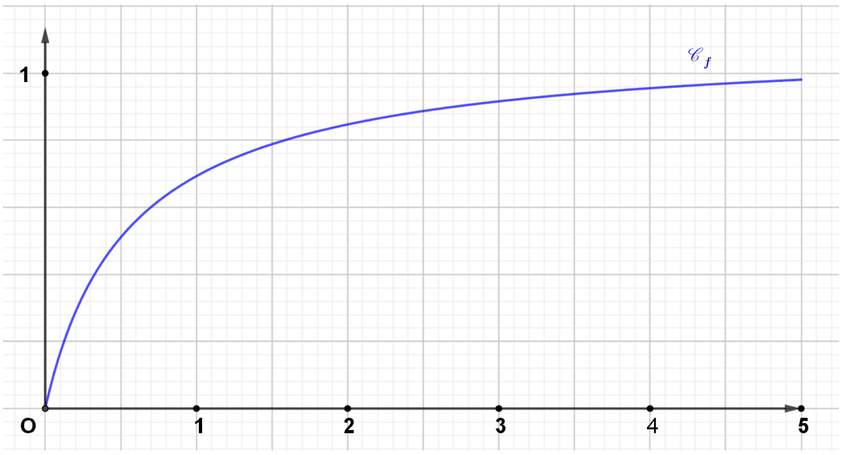
EXERCICE 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

2.a. Démontrer que pour tout nombre réel positif ou nul, $f'(x)=\frac{2}{(x+1)(3x+1)}$

2.b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note L la limite de la suite (u_n). On admet que $f(L)=L$.
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de L.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$ où $x_0=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}=0{,}215$ et $g(x_0)=0{,}088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0		x_0		$+\infty$
Variations de la fonction g	0	↗	$g(x_0)$	↘	$-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.

2.a. Recopier et compléter l'algorithme ci-après afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.

```
x ← 0.22
Tant que . . . . . . . .faire
        x ← x+0.01
Fin Tant que
```

2.b. Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite L de la suite (u_n).

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x de $[0;+\infty[$ $f(x)=\ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$.

Remarque

Pour tout réel x positif ou nul : $\frac{3x+1}{x+1}>0$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x+1}=\frac{3}{1}=3$ et $\lim_{X\to3}\ln(X)=\ln(3)$ donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln(3)$

La droite d'équation y=ln(3) est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

2.a. $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$

$u(x)=\frac{3x+1}{x+1}$ $u'(x)=\frac{(x+1)\times3-(3x+1)\times1}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

$\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{3x+1}=\frac{2}{(x+1)(3x+1)}$

$f'(x)=\frac{2}{(x+1)(3x+1)}$

2.b. Pour tout nombre réel positif ou nul, $f'(x)>0$.

Donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$;

Partie B

$u_0=3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

Initialisation

$u_0=3$ $f(u_0)=u_1=\frac{3\times3+1}{3+1}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2{,}5$

donc $\frac{1}{2}\leqslant u_1\leqslant u_0$ et la propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est vérifiée pour tout entier naturel n, on suppose que $\frac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$

et on doit démontrer que $\frac{1}{2}\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$.

f est une fonction croissante sur $[0;+\infty[$ donc

Si $\frac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ alors $f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)$

Or $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{3\times0{,}5+1}{0{,}5+1}\right)=\ln\left(\frac{2{,}5}{1{,}5}\right)=\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ = 0,51à 10^{-2} près donc $\frac{1}{2}\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(u_n)=u_{n+1}$.

Conséquence :

$\frac{1}{2}\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$

2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc (u_n) est décroissante, et $\frac{1}{2} \leqslant u_n$ donc (u_n) est une suite minorée par $\frac{1}{2}$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ donc (u_n) est une suite convergente et sa limite $L \geqslant \frac{1}{2} > 0$.

Partie C

1. Sur $]0;x_0]$ g est strictement croissante donc si $0 < x \leqslant x_0$ alors $g(0)=0<g(x)$.
L'équation g(x)=0 n'admet pas de solution sur $]0;x_0]$.
Sur $[x_0;+\infty[$ g est stictement décroissante et continue $g(x_0)>0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
0 appartient à l'intervalle $]-\infty;g(x_0)]$
Le Théorème des valeurs intermédiaires nous permet que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α appartenant à $[x_0;+\infty[$.

2.a.

```
x ← 0.22
Tant que g(x)>0 faire
        x ← x+0.01
Fin Tant que
```

2.b. On peut utiliser l'algorithme pas à pas avec la calculatrice, les calculs sont un peu longs, on obtient **0,53.**

. On propose un programme Python.
Programme

```
print('Début de programme')
from math import*
x=0.22
while log((3*x+1)/(x+1))-x>0:
    x=x+0.01
print("x="+str(x))
print("Fin de programme")
```

Exécution

```
Début de programme
x=0.5300000000000002
Fin de programme
```

. On peut obtenir aussi cette valeur par balayage.
$g(0{,}52)=1{,}3\times10^{-3}>0$ et $g(0{,}53)=-3{,}61\times10^{-3}$

3. g(L)=f(L) – L donc $0{,}52<L<0{,}53$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L = 0{,}53$ à 10^{-3} près par excès.