EXERCICE 3 *5 points*

Soit ABCDEFGH un cube et I le centre du carré ADHE, c'est à dire, le milieu du segment [AH] et du segment [ED]. Soit J un point du segment [CG].
La section du cube ABCDEFGH par le plan (FIJ) est le quadrilatère FKLJ.

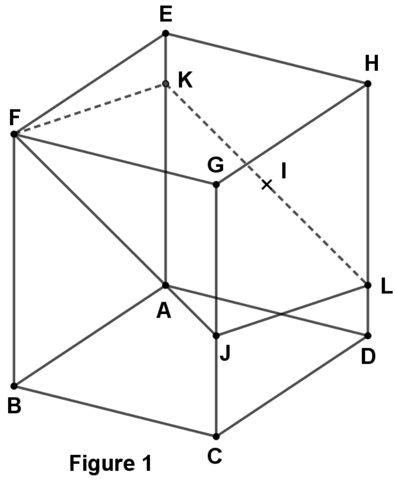

Figure 1

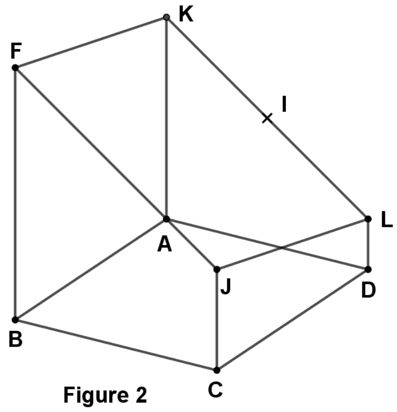

Figure 2

On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.
On a donc A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0) et E(0;0;1).

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

Dans cette partie le point I a pour coordonnées $\left(1;1;\dfrac{2}{5}\right)$

1. Démontrer que les coordonnées du point I sont $\left(0;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

1.a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).

1.b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $-x+3y+5z-4=0$.

2. Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) et passant par B.

2.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2.b. On note M le point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ).
Démontrer que $M\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{3}{7};\dfrac{3}{7}\right)$.

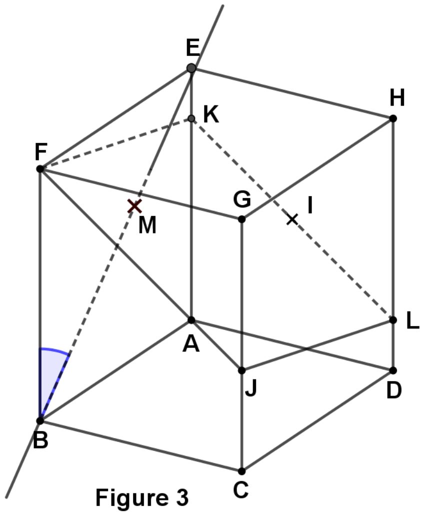

Figure 3

3.a. Calculer $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BF}$

3.b. En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{MBF}$.

Partie B

Dans cette partie , J est un point quelconque du segment [CG].
Ses coordonnées sont donc (1;1;a), où a est un réel de l'intervalle [0;1].

1. Montrer que la section du cube par le plan (FIJ) est un parallélogramme.

2. On admet alors que L a pour coordonnées $\left(0\,;1\,;\frac{a}{2}\right)$.
Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère FKLI est-il un losange ?

CORRECTION

Partie A

1. A(0;0;0) H(0;1;1) I est le milieu de [AH] $I\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+1}{2};\frac{0+1}{2}\right)$ I(0;0,5;0,5).

1.a. $\vec{n}$ est un verteur normal au plan (FIJ) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FIJ) par exemples $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{FJ}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ F(1;0;1) I(0;0,5;0,5) J(1;1;0,4) $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}-1\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-0,6\end{pmatrix}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{FI}=-1\times(-1)+3\times0,5+5\times(-0,5)=1+1,5-2,5=0$

$n.\overrightarrow{FJ}=-1\times0+3\times1+5\times(-0,6)=0+3-3=0$

Conclusion

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).

1.b. M(x;y;z) appartient au plan (FIJ) si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{FM}=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{FM}=0 \Leftrightarrow -1\times(x-1)+3y+5\times(z-1)=0 \Leftrightarrow -x+1+3y+5z-5=0$

$\Leftrightarrow -x+3y+5z-4=0$

(FIJ) : -x+3y+5z-4=0

2.a. d est la droite passant par B(1;0;0) et de vecteur directeur $\vec{n}$.

$$d : \begin{cases} x=-t+1 \\ y=3t \\ z=5t \end{cases} \quad t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

2.b. Pour déterminer l'intersection de la droite d et du plan (FIJ), on résout le système :

$$\begin{cases} -x+3y+5z-4=0 \\ x=-t+1 \\ y=3t \\ z=5t \end{cases}$$

On obtient :

$-(-t+1)+3\times3t+5\times5t-4=0 \Leftrightarrow t-1+9t+25t-4=0 \Leftrightarrow 35t=5 \Leftrightarrow t=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$.

$x=-\frac{1}{7}+1=\frac{6}{7}$ $y=\frac{3}{7}$ $z=\frac{5}{7}$ $M\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)$.

3.a. B(1;0;0) F(1;0;1) $M\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)$ $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}\\\frac{3}{7}\\\frac{5}{7}\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BM}=0\times\left(-\frac{1}{7}\right)+0\times\frac{3}{7}+1\times\frac{5}{7}=\frac{5}{7}$

3.b. $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BM}=BF\times BM\times\cos(\widehat{MFB})$

$BF=1$ $BM^2=\frac{1}{49}+\frac{9}{49}+\frac{25}{49}=\frac{35}{49}$ $BM=\frac{\sqrt{35}}{7}$.

$1\times\frac{\sqrt{35}}{7}\times\cos(\widehat{MFB})=\frac{5}{7} \Leftrightarrow \cos(\widehat{MFB})=\frac{5}{7}\times\frac{7}{\sqrt{35}}=\frac{5}{\sqrt{35}}$

En utilisant la calculatrice on obtient : $\widehat{MFB} = 32°$ arrondi au degré.

Partie B

1. Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les deux droites d'intersection sont parallèles et (FK) et (JL) sont parallèles.
Conséquence
Le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.

2. F(1;0;1) J(1;1;a) $L\left(0;1;\frac{a}{2}\right)$ $0 \leqslant a \leqslant 1$.

$KJ^2=(1-1)^2+(1-0)^2+(a-1)^2=(a-1)^2+1=a^2-2a+2$

$JL^2=(0-1)^2+(1-1)^2+\left(a-\frac{a}{2}\right)^2=1+\frac{a^2}{4}$.

FKLI est un losange si et seulement si $a^2-2a+2=1+\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 4a^2-8a+8=4+a^2 \Leftrightarrow 3a^2-8a+4=0$

$\Delta=64-4\times3\times4=16=4^2$

$a'=\frac{8-4}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $0\leqslant\frac{2}{3}\leqslant1$ $a''=\frac{8+4}{6}=2$ $1 < 2$

Conclusion
Il existe une seule valeur de a pour laquelle le quadrilatère FJLK est un losange.

$a=\frac{2}{3}$ $J\left(1;1;\frac{2}{3}\right)$ $L\left(0;1;\frac{1}{3}\right)$.