## *EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points*

*Les parties A et B sont indépendantes.*

**Partie A**

On considère l'équation (E) : $25z^2-14z+25=0$ .

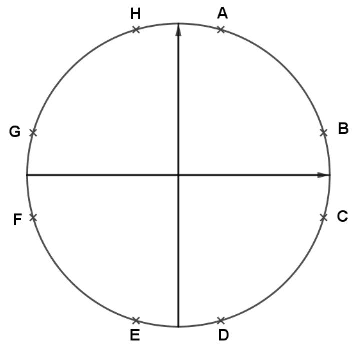
**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On écrira les solutions sous forme algébrique.

**2.** Démontrer que les solutions de (E) sont de module 1.

**3.** On note $\alpha$ le réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos(\alpha)=\frac{7}{25}$ et $\sin(\alpha)=\frac{24}{25}$ .

Écrire les solutions de (E) sous forme exponentielle en fonction de $\alpha$ .

**4.**




La figure ci-dessus fait apparaître huit points du cercle unité. Deux de ces huit points ont une affixe solution de l'équation (E). Lesquels ?

**Partie B**

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
*Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

**1. Affirmation A :**

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}=1$$

**2.** Soit z le nombre complexe $\frac{1}{6}(2+5i)$ .

**Affirmation B :**

$\lim\limits_{n\to+\infty}|z|^n=0$ .

**3.** On rappelle que pour tout nombre réel x, $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$ .

**Affirmation C :**

Pour tout nombre réel $\alpha$ de $[-\pi;0]$ tel que $\cos(2\alpha)=\frac{7}{2}$ , on a $\sin(\alpha)=-\frac{3}{5}$ .

**CORRECTION**

**Partie A**

**1.** (E) : $25z^2-14z+25=0$

$\Delta=(-14)^2-4\times25\times25=196-2500=-2304=-48^2=(i48)^2$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$z_1=\frac{14+i48}{50}=\frac{7}{25}+i\frac{24}{25}$ $\qquad z_2=\frac{14-i48}{50}=\frac{7}{25}-i\frac{24}{25}$

**2.** $|z_1|^2=|z_2|^2=\left(\frac{7}{25}\right)^2+\left(\frac{24}{25}\right)^2=\frac{49+576}{625}=\frac{625}{625}=1$

donc $z_1$ et $z_2$ sont des nombres complexes de module 1.

**3.** $z_1=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)=e^{i\alpha}$ $\qquad z_2=\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)=e^{-i\alpha}$

**4.** L'image ponctuelle de $z_1$ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{25};\frac{24}{25}\right)$ qui sont les coordonnées du point **A.**

L'image ponctuelle de $z_2$ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{25};-\frac{24}{25}\right)$ qui sont lrs coordonnées du point **D.**

**Partie B**

**1. Affirmation A : FAUSSE**

*Justification*

$z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad |z|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ donc $|z|=1$

$\cos(\beta)=\frac{1}{2}$ $\qquad \sin(\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \beta\equiv\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

$z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad z^{2019}=e^{i\frac{\pi}{3}\times2019}$ $\qquad 2019=6\times336+3$ $\qquad \frac{\pi}{3}\times2019=\frac{\pi}{3}\times6\times336+\frac{\pi}{3}\times3=2\pi\times336+\pi$

$z^{2019}=(e^{i2\pi})^{336}\times e^{i\pi}=1^{336}\times e^{i\pi}=e^{i\pi}=-1\neq1$

**2. affirmation B : VRAIE**

*Justification*

$z=\frac{2}{6}+i\frac{5}{6}$ $\qquad |z|^2=\frac{4}{36}+\frac{25}{36}=\frac{29}{36}<1$ $\qquad |z|=\frac{\sqrt{29}}{6}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}|z|^n=0$

**3. Affirmation C : VRAIE**

*Justification*

$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$

On a aussi $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ donc $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$

$\cos(2x)=1-\sin^2(x)-\sin^2(x)=1-2\sin^2(x)$ $\Leftrightarrow$ $2\sin^2(x)=1-\cos(2x)$

Si $\cos(2\alpha)=\frac{7}{25}$ alors $2\sin^2(\alpha)=1-\frac{7}{25}=\frac{18}{25}$ $\Leftrightarrow$ $\sin^2(\alpha)=\frac{9}{25}$ $\Leftrightarrow$ $|\sin(\alpha)|=\frac{3}{5}$

Si $\alpha$ appartient à l'intervalle $[-\pi;0]$ alors $\sin(\alpha)\leqslant0$ donc $\sin(\alpha)=-\frac{3}{5}$.