## EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite $(a_n)$ définie pour tout entier naturel n par : $a_n=\frac{4^{2n+1}+1}{5}$ .

**1.** Calculer $a_2$ et $a_3$ .

**2.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=16a_n-3$ .

**3.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_n$ est un entier naturel.

**4.** Dans cette question on utilise l'égalité de la question 2, afin de démontrer plusieurs propriétés de termes de la suite $(a_n)$ .

**4.a.** Pour tout entier naturel n, on note $d_n$ le plus grand diviseur commun de $a_n$ et $a_{n+1}$ .
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $d_n$ est égal à 1 ou à 3.

**4.b.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}\equiv a_n \quad (3)$

**4.c.** Vérifier que $a_0\equiv 1 \quad (3)$ .
En déduire que, pour tout entier naturel n, le nombre $a_n$ n'est pas divisible par 3.

**4.d.** Démontrer alors que, pour tout entier naturel $a_n$ et $a_{n+1}$ sont premiers entre eux.

**5.** L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout entier n supérieur à 2, le nombre $a_n$ n'est pas premier.
On pose pour tout entier naturel n,
$b_n=2^{n+1}(2^n-1)+1$ et $c_n=2^{n+1}(2^n+1)+1$ .
On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,
$5a_n=b_nc_n$

**5.a.** Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,
5 divise $b_n$ ou 5 divise $c_n$ .

**5.b.** Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Démontrer que $b_n > 5$ et $c_n > 5$.

**5.c.** En déduire que $a_n$ n'est pas un nombre premier.

**CORRECTION**

Pour tout entier naturel n, $a_n=\frac{4^{2n+1}+1}{5}$ .

**1.** $a_2=\frac{4^5+1}{5}=\frac{1024+1}{5}=\frac{1025}{5}=$ **205** $a_3=\frac{4^7+1}{5}=\frac{16384+1}{5}=\frac{16385}{5}=$ **3277**

**2.** Pour tout entier naturel n

$$16a_n-3=16\times\frac{4^{2n+1}+1}{5}-3=\frac{16\times 4^{2n+1}+16-15}{5}=\frac{4^2\times 4^{2n+1}-1}{5}=\frac{4^{2n+3}-1}{5}=\frac{4^{2(n+1)+1}-1}{5}=a_{n+1}\ .$$

**3.** On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $a_n$ est un entier naturel.

Initialisation

$a_0=\frac{4^1+1}{5}=1$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $a_n$ est un entier naturel et on doit démontrer que $a_{n+1}$ est un entier naturel.

Or $a_{n+1}=16a_n-3$ donc $a_{n+1}$ est un entier.

D'autre part $a_n=\frac{4^{2n+1}+1}{5}>0$ , donc $a_n\geqslant 1$ et $a_{n+1}>0$ .

On en déduit que $a_{n+1}$ est un entier naturel.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $a_n$ est un entier naturel.

**4.a.** $d_n$ est un diviseur commun de $a_n$ et $a_{n+1}$ donc $d_n$ est un diviseur de $a_{n+1}-16a_n=3$ .

3 est un nombre premier donc $d_n=1$ ou $d_n=3$ .

**4.b.** $16=3\times 5+1$ donc $16\equiv 1\ (3)$

Pour tout entier naturel n :

$a_{n+1}-16a_n\equiv a_{n+1}-a_n\ (3)$

or $a_{n+1}-16a_n=3$ donc $a_{n+1}-16a_n\equiv 0\ (3)$

Conséquence

$a_{n+1}-a_n\equiv 0\ (3)\quad\Leftrightarrow\quad a_{n+1}\equiv a_n\ (3)$

**4.c.** $a_0=1$ donc $a_0\equiv 1\ (3)$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $a_n\equiv 1\ (3)$

Initialisation

$a_0\equiv 1\ (3)$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédidité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $a_n\equiv 1\ (3)$ et on doit démontrer que $a_{n+1}\equiv 1\ (3)$

Or pour tout entier naturel n, $a_{n+1}\equiv a_n\ (3)$ .

Si $a_n\equiv 1\ (3)$ alors $a_{n+1}\equiv 1\ (3)$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $a_n\equiv 1\ (3)$

**4.d.** Si $a_n\equiv 1\ (3)$ alors $a_n$ n'est pas divisible par 3 et 3 n'est pas un diviseur commun de $a_n$ et $a_{n+1}$ .

Conséquence

La seule valeur possible pour $d_n$ est 1.
**Les nombres $a_n$ et $a_{n+1}$ sont premiers entre eux.**

**5.** Pour tout nombre entier naturel $n$,
$b_n=2^{n+1}(2^n-1)+1$ et $c_n=2^{n+1}(2^n+1)+1$ .
Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on admet que :
$5a_n=b_nc_n$ .

**5.a.** 5 est un nombre premier, divise le produit $b_nc_n$ donc 5 divise l'un des deux facteurs du produit.
Conséquence
5 divise $b_n$ **ou** 5 divise $c_n$ .

**5.b.** Si $n\geqslant 2$ alors $2^{n+1}\geqslant 2^3=8$ et $2^n\geqslant 4-1=3$ donc $b_n\geqslant 8\times 3+1=25>5$ .
De même $2^n+1\geqslant 4+1=5$ et $c_n\geqslant 8\times 5+1=40+1=41>5$
Conséquence
Pour tout entier supérieur ou égal à 2, $b_n>5$ et $c_n>5$ .

**5.c.** Pour tout entier supérieur ou égal à 2 :
Si $b_n$ est divisible par 5 alors $b_n=5b_n'$ avec $b_n'$ entier naturel strictement supérieur à 1 car $b_n>5$ .
On a $a_n=b_n'\times c_n$ avec $b_n'>1$ et $c_n>5$ donc $a_n$ n'est pas un nombre premier.
Si $c_n$ est divisible par 5, on obtient de même $a_n=b_n\times c_n'$ avec $b_n$ entier strictement supérieur à 5 et $c_n'$ entier naturel strictement upérieur à 1. Donc $a_n$ n'est pas un nombre premier.