EXERCICE 1 *5 points*

Les probabilités demandées seront arrondies à 0,01.

Un commerçant vient de s'équiper d'un distributeur de glaces à l'italienne.

1. La durée, en mois, de fonctionnement sans panne de son distributeur de glace à l'italienne est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif (on rappelle que la fonction f de densité de la loi exponentielle est donnée sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.
Le vendeur de l'appareil assure que la durée moyenne de fonctionnement sans panne de ce type de distributeur, c'est à dire l'espérance mathématique de X, est de 10 mois.

1.a. Justifier que $\lambda=0{,}1$.

1.b. Calculer la probabilité que le distributeur de glaces à l'italienne n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois.

1.c. Sachant que le distributeur n'a connu aucune panne pendant les six premiers mois, quelle est la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la fin de la première année ? Justifier.

1.d. Le commerçant remplacera son distributeur de glaces à l'italienne au bout d'un temps t exprimé en mois qui vérifie que la probabilité de l'évènement $(X>t)$ est égale à $0{,}05$.
Déterminer la valeur de t arrondie à l'entier.

2. La notice du distributeur de glaces précise que le distributeur fournit des glaces à l'italienne dont la masse est comprise entre 55g et 65g.
On considère la variable aléatoire M représentant la masse, en grammes, d'une glace distribuée. On admet que M suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart-type 2,5.

2.a. Calculer la probabilité que la masse d'une glace à l'italienne choisie au hasard parmi celles distribuée soit comprise entre 55g et 65g.

2.b. Déterminer la plus grande valeur de m, arrondie au gramme près, telle que la probabilité $P(M\geqslant m)$ soit supérieure ou égale à 0,99.

3. Le distributeur de glaces à l'italienne permet de choisir un seul des deux parfums : vanille ou fraise. Pour mieux gérer ses achats en matières premières, le commerçant fait l'hypothèse qu'il y aura en proportion deux acheteurs de glace à la vanille pour un acheteur de glace à la fraise.
Le premier jour d'utilisation de son distributeur, il constate que sur 120 consommateurs, 65 ont choisi de la glace à la vanille.
Pour quelle raison mathématique pourrait-il mettre en doute son hypothèse ? Justifier.

CORRECTION

1.a. X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Donc $E(X)=\frac{1}{\lambda}$ et $E(X)=10 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}=10 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{10}=$ **0,1.**

1.b. On nous demande de calculer $P(6\leqslant X)$.

La fonction de densité f est donnée sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=0{,}1\,e^{-0{,}1x}$.

F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=-e^{-0{,}1x}$ est une primitive de f.

$P(6\leqslant X)=1-P(0\leqslant X\leqslant 6)=1-\int_0^6 f(x)\,dx=1-(F(6)-F(0))=1+e^{-0{,}6}-1=e^{-0{,}6}=$ **0,55** à 10^{-2} près.

1.c. La loi exponentielle de paramètre 0,1 est une loi de durée de vie sans vieillissement donc :

$P_{(6\leqslant X)}(12\leqslant X)=P(12-6\leqslant X)=P(6\leqslant X)=$ **0,55.**

1.d $P(X>t)=e^{-0{,}1t}$

$P(X>t)=0{,}05 \Leftrightarrow e^{-0{,}1t}=0{,}05 \Leftrightarrow -0{,}1t=\ln(0{,}05) \Leftrightarrow t=\frac{\ln(0{,}05)}{-0{,}1} \Leftrightarrow t=10\ln\left(\frac{1}{0{,}05}\right)$

$\Leftrightarrow t=10\ln(20)=$ **30** à l'unité près.

2.a. M suit la loi normale d'espérance $\mu=60$ et d'écart-type $\sigma=2{,}5$.

$P(55\leqslant M\leqslant 65)=P(\mu-2\sigma\leqslant M\leqslant \mu+2\sigma)=$ **0,95** à 10^{-2} près.

2.b. On utilise la calculatrice pour déterminer m tel que $P(M\geqslant m)=0{,}99$.

On obtient $m=54{,}18$ $\quad 54\leqslant m\leqslant 55$ on a $P(M\geqslant 55)<0{,}99$ et $P(M\geqslant 54)>0{,}99$

54 est la plus grande valeur de m au gramme près vérifiant $P(M\geqslant m)\geqslant 0{,}99$.

3. Le commerçant fait comme hypothèse que la probabilité qu'un consommateur, choisi au hasard, choisisse une glace vanille est $\frac{2}{3}$ donc celle qu'il choisisse une glace fraise est $\frac{1}{3}$.

Pour un échantillon de 120 consommateurs : $n=120\geqslant 30$; $np=80\geqslant 5$ et $n(1-p)=40\geqslant 5$.

On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I=\left[\frac{2}{3}-1{,}96\times\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{120}};\frac{2}{3}+1{,}96\times\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{120}}\right]$$

$1{,}96\times\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{120}}=0{,}084$ à 10^{-3} près.

I=[0,58;0,76]

La fréquence constatée sur l'échantillon est : $f=\frac{65}{120}=0{,}54$ à 10^{-2} près.

0,54 n'appartient pas à I, donc au seuil de 95 % **on peut mettre en doute l'hypothèse du commerçant.**