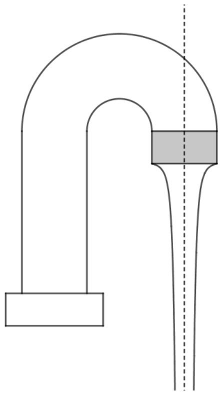
EXERCICE 2 — 5 points

L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.



On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe** par la courbe C dans un repère orthonormé.

Partie A

On considère que la courbe C donnée en **annexe** est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $]0;1]$ qui respecte les trois conditions suivantes :

$$\text{(H) : } f(1)=0 \qquad f'(1)=0{,}25 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$$

1. La fonction f peut-elle être une fonction polynôme du second degré?Pourquoi ?

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;1]$ par $g(x)=k\ln(x)$.
2.a. Déterminer le réel k pour que la fonction g respecte les trois condition (H).
2.b. La courbe représentative de la fonction g coïncide-t-elle avec la courbe C ? Pourquoi ?

3. Soit h la fonction définie sr l'intervalle $]0;1]$ par $h(x)=\frac{a}{x^4}+bx$ où a et b sont des réels.

Déterminer a et b pour que la fonction h respecte les trois conditions (H).

Partie B

On admet dans cette partie que la courbe C est la représentation graphique d'une fonction f continue strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle $]0;1]$ d'expression :

$$f(x)=\frac{1}{20}\left(x-\frac{1}{x^4}\right)$$

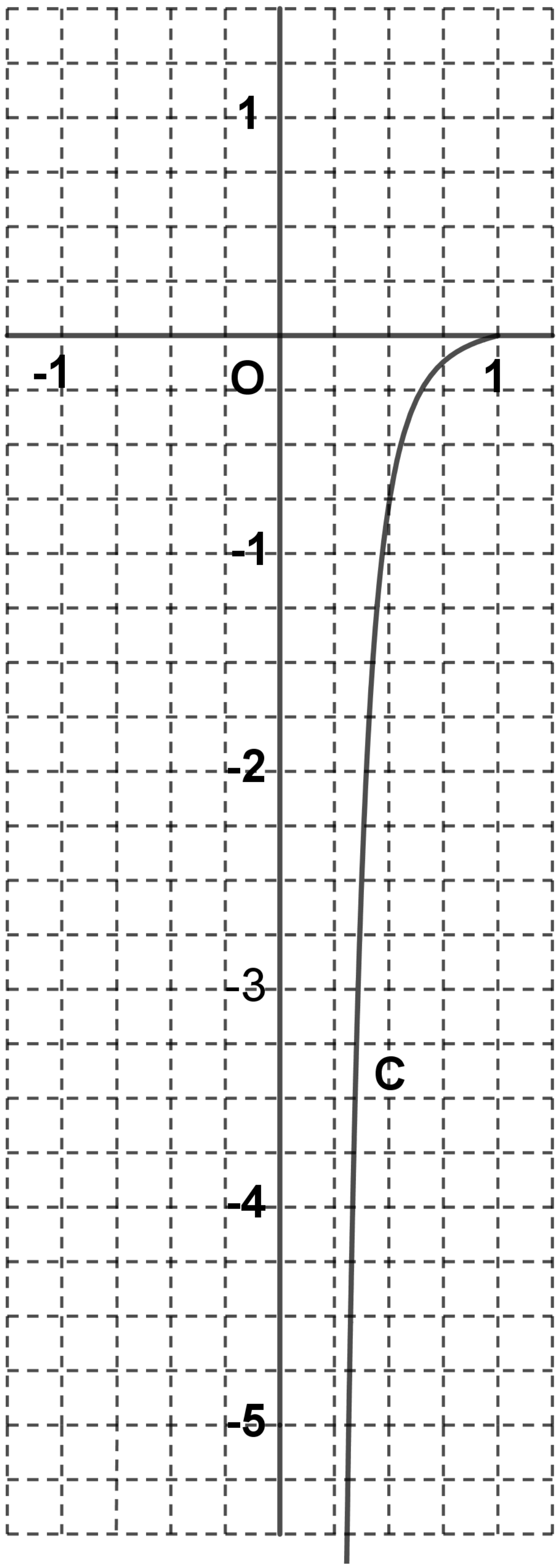
1. Justifier que l'équation $f(x)=-5$ admet sur l'intervalle $]0;1]$ une unique solution qui sera notée α.
Déterminée une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

2. On admet que le volume d'eau en cm^3, contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement est donné par la formule : $V=\int_{\alpha}^{1}\pi x^2 f'(x)\,dx$.

2.a. Soit u la fonction dérivable sur $]0;1]$ définie par $u(x)=\frac{1}{2x^2}$. Déterminer sa fonction dérivée.

2.b. Déterminer la valeur exacte de V. En utilisant la valeur la valeur approchée de α obtenue à la question 1, donner une valeur approchée de V.

ANNEXE



CORRECTION

Partie A

1. Si f est une fonction polynôme du second degré alors pour tout nombre réel x de l'intervalle]0;1] on a $f(x)=ax^2+bx+c$ avec a nombre réel non nul et b et c sont des nombres réels.
$\lim_{x\to 0} f(x)=c\neq-\infty$ donc **f ne vérifie pas l'une au moins des 3 conditions.**

2.a. g est définie sur]0;1] par $g(x)=k\ln(x)$
$g(1)=k\ln(1)=0$
$g'(x)=k\times\frac{1}{x}$ $g'(1)=k$ $g'(1)=0{,}25$ $\Leftrightarrow$ $k=0{,}25$ donc $g(x)=0{,}25\ln(x)$
$\lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$
La fonction g définie sur]0;1] par g(x)=0,25ln(x) vérifie (H).

2.b. g(0,25)=0,25ln(0,25)=-0,35 à 10^{-2} près.
La courbe représentative de la fonction f donnée en **annexe** ne passe pas par le point de coordonnées (0,25;-0,35) car l'ordonnée du point de C d'abscisse 0,25 est inférieure à -5.
Conséquence
La courbe représentative de g ne coïncide pas avec C.

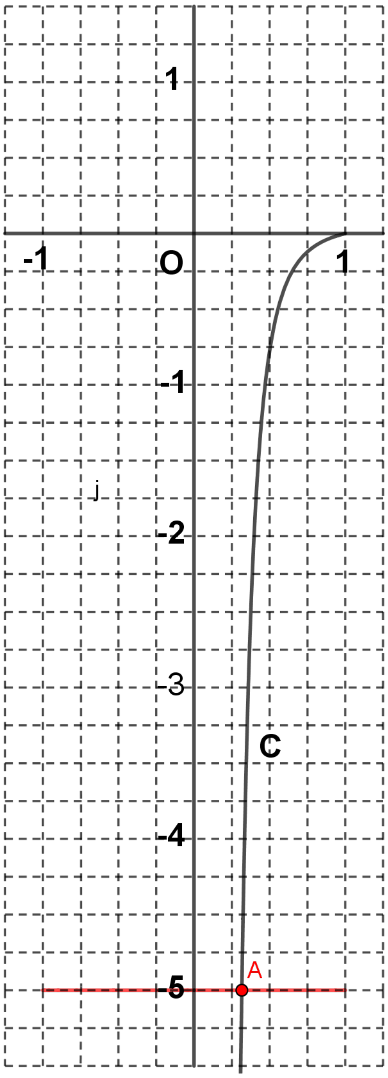
3. h est définie sur]0;1] par $h(x)=\frac{a}{x^4}+bx$.
$h(1)=a+b$ $h(1)=0$ $\Leftrightarrow$ $a+b=0$ $\Leftrightarrow$ $b=-a$
$h'(x)=\frac{-4ax^3}{x^8}+b=\frac{-4a}{x^5}+b$
$h'(1)=-4a+b=-5a$ $h'(1)=0{,}25$ $\Leftrightarrow$ $-5a=0{,}25$ $\Leftrightarrow$ $a=\frac{0{,}25}{-5}=-0{,}05$
$b=-a=0{,}05$ donc $h(x)=\frac{-0{,}05}{x^4}+0{,}05x$
$\lim_{x\to 0} -0{,}5x=0$ $\lim_{x\to 0}\frac{-0{,}05}{x^4}=-\infty$ donc $\lim_{x\to 0} h(x)=-\infty$
Conclusion
h vérifie (H)

Partie B

$f(x)=\frac{1}{20}\left(x-\frac{1}{x^4}\right)$

Remarque
$\frac{1}{20}=0{,}05$ donc f(x) = h(x)

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle]0:1]
$f'(x)=\frac{1}{20}\left(1+\frac{1}{x^5}\right)>0$
f est continue et strictement croissante sur]0;1] à valeurs dans l'intervalle $]-\infty;0]$, -5 appartient à cet intervalle.
Le théorème des valeurs intermédiaires, nous permet d'affirmer qu'il existe un nombre réel unique α appartenant à]0;1] tel que $f(\alpha)=-5$.
α est l'abscisse du point A point d'intersection de C et de la droite d'équation y=-5.



En utilisant la calculatrice on obtient :
$f(0{,}32)=-4{,}75$ et $f(0{,}31)=-5{,}40$ $\quad 0{,}31<\alpha<0{,}32$
α = **0,32** à 10^{-2} près/

2. $\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x^2}$

$\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)'=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{-2x}{x^4}\right)=-\dfrac{1}{x^3}$

$f(x)=\dfrac{1}{20}x-\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1}{x^4}$

$f'(x)=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{20}\times\dfrac{4x^3}{x^8}=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{x^5}$

$x^2f'(x)=\dfrac{1}{20}x^2+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{x^3}$

Soit l la fonction définie sur]0;1] par $l(x)=\pi x^2 f'(x)$ alors la fonction L définie sur]0;1] par :

$L(x)=\pi\left(\dfrac{x^3}{60}-\dfrac{1}{10x^2}\right)$ est une primitive de l.

$V=\displaystyle\int_\alpha^1 \pi x^2 f'(x)\,dx = L(1)-L(\alpha)=\pi\left(\dfrac{1}{60}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{\alpha^3}{60}+\dfrac{1}{10\alpha^2}\right)$ cm^3

V = 2,79 cm^3 **.**