EXERCICE 3 — 5 points

On considère la suite (I_n) définie par $I_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}\,dx$ et pour tout entier naturel n non nul : $I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\,dx$

1. Montrer que $I_0=\ln(2)$.

2.a. Calculer I_0-I_1
2.b. En déduire I_1.

3.a. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n-I_{n+1}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$
3.b. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n.

4. Soit n un entier naturel non nul.
On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ alors $0\leqslant\dfrac{x^n}{1-x}\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

4.a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n $0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{1}{2^n}$.
4.b. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\ldots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

5.a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n=I_0-I_n$.
5.b. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

CORRECTION

1. $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{-x} dx$

$u(x)=1-x$ $u'(x)=-1$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ $u(x)>0$.

$f(x)=\frac{1}{1-x}=-\frac{u'(x)}{u(x)}$

La fonction F définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $F(x)=-\ln(u(x))=-\ln(1-x)$ est une primitive de f.

$I_0=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(00)=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+0 =$ **$\ln(2)$.**

2.a. $I_0-I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx$

Soit h la fonction définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $h(x)=1$ alors la fonction H définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $H(x)=x$ est une primitive de h.

$I_0-I_1=H\left(\frac{1}{2}\right)-H(0)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

2.b. $I_1=I_2-\frac{1}{2}=\ln(2)-\frac{1}{2}$

3.a. Pour tout entier naturel n

$$I_n-I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n(1-x)}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx$$

Soit g_n la fonction définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $g_n(x)=x^n$ alors la fonction G_n définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $G_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de g_n.

$$I_n-I_{n+1}=G_n\left(\frac{1}{2}\right)-G_n(0)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

3.b. Pour tout entier naturel n

$$I_{n+1}=I_n-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

Algorithme

n est un entier naturel donné
k est un entier naturel
I est un nombre réel

Initialisation $k \leftarrow 0$
$I \leftarrow \ln(2)$

Traitement Tant que $k<n$, faire
$k \leftarrow k+1$
$I \leftarrow I-\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k}$
Fin Tant que

Sortie Afficher I

4.a. On admet que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$

En utilisant les propriétés des intégrales et de la relation d'ordre

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}}\,dx$$

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx$$

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}-0\right)$$

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n}$$

4.b. $0<\dfrac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$.

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n=0$.

5. Pour tout entier naturel non nul n :

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\ldots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

$$S_{n+1}=S_n+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a : $S_n=I_0-I_n$.

<u>Initialisation</u>

Pour n=1 on a $S_1=\dfrac{1}{2}$ et nous avons démontrer que $I_0-I_1=\dfrac{1}{2}$.

La propriété est donc vérifiée pour n = 1.

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que : $S_n=I_0-I_n$ et on doit démontrer que $S_{n+1}=I_0-I_{n+1}$.

Or $I_0-I_{n+1}=I_0-\left(I_n-\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\right)=I_0-I_n+\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}=S_n+\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}=S_{n+1}$

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n on a : $S_n=I_0-I_n$.

5.b. $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=I_0$ = **ln(2).**

<u>Compléments</u>

On peut proposer un programme en Python de l'algorithme.

<u>Programme</u>

```python
print('Début de programme')
print("Veuillez donner un entier naturel non nul n")
a=input()
n=int(a)
from math import*
k=0
I=log(2)
while k<n:
    k=k+1
    I=I-(0.5**k)/k
print("I="+str(I))
print("Fin de programme")
```

<u>Exécution</u>

. n=1

```
Début de programme
Veuillez donner un entier naturel non nul n
1
I=0.1931471805599453
Fin de programme
```

. n=10

```
Début de programme
Veuillez donner un entier naturel non nul n
10
I=8.232440915163761e-05
Fin de programme
>>>
```

. n=30

```
Début de programme
Veuillez donner un entier naturel non nul n
30
I=2.915619295357316e-11
Fin de programme
```

. n=50

```
Début de programme
Veuillez donner un entier naturel non nul n
50
I=-3.9193022557107595e-18
Fin de programme
```

<u>Remarque</u>

On peut démontrer que si $n\geqslant 100$ alors $0{,}5^n<10^{-30}$.