EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie :**
. ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AB=12$, $AD=18$ et $AE=6$.
. EBDG est un tétraèdre.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine A dans lequel les points B, D et E ont pour coordonnées respectives $B(12;0;0)$, $D(0;18;0)$ et $E(0;0;6)$.

1. Démontrer que le plan (EBD) a pour équation cartésienne $3x+2y+6z-36=0$.

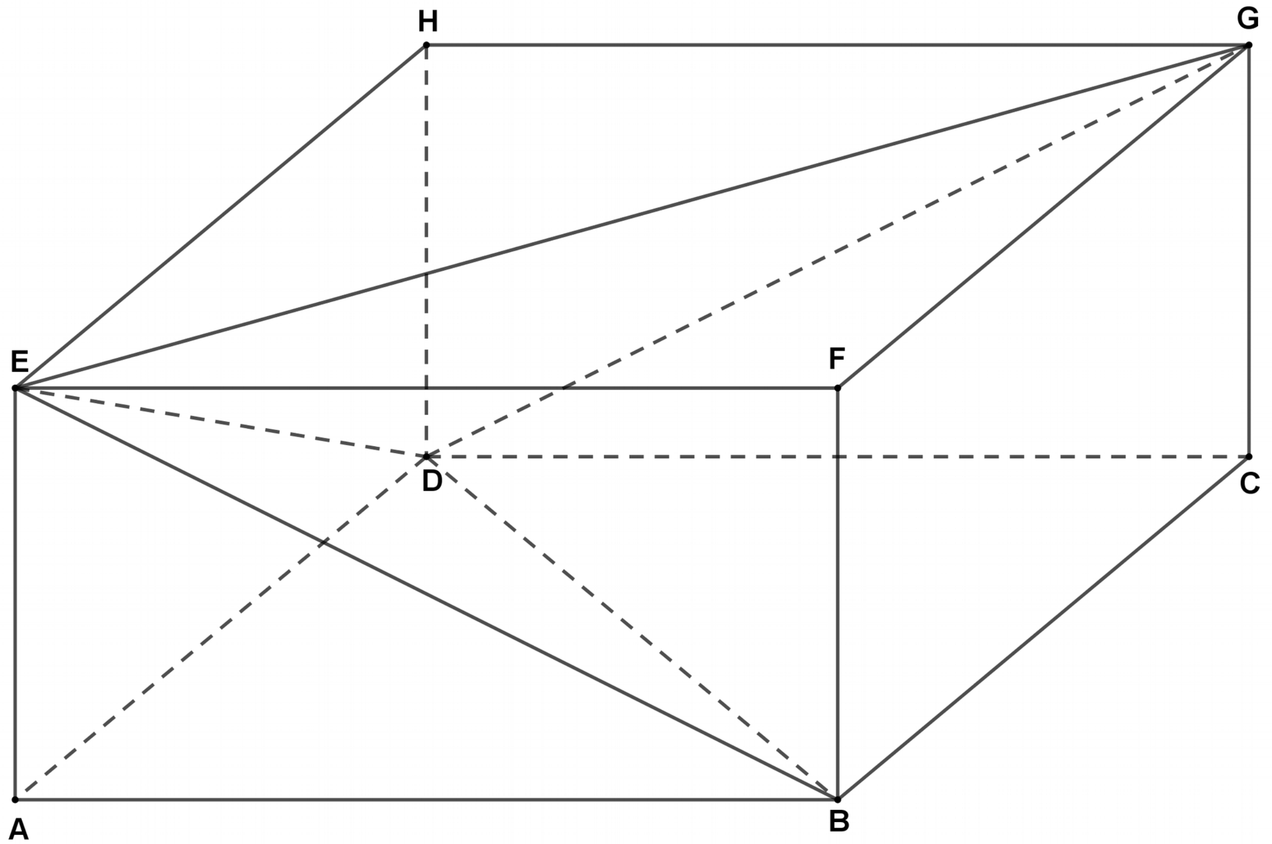
2.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).
2.b. En déduire que la droite (AG) coupe le plan (EBD) en un point K de coordonnées (4;6;2).

3. La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (EBD) ? Justifier.

4.a. Soit M le milieu du segment [ED]. Démontrer que les points B, K et M sont alignés.
4.b. Construire alors le point K sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie.**

5. On note P le plan parallèle au plan (ADE) passant par le point K.
5.a. Démontrer que le plan P coupe le plan (EBD) selon une parallèle à la droite (ED).
5.b. Construire alors sur **l'annexe à rendre avec la copie** l'intersection du plan P et de la face EBD du tétraèdre EBDG.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)



CORRECTION

Le repère est orthonormal.
B(12;0;0) D(0;18;0) E(0;0;6)

1. $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-12\\18\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-12\\0\\6\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires donc les points B, D et E ne sont pas alignés.
$3x+2y+6z-36=0$ est une équation cartésienne du plan (EBD) si et seulement si les coordonnées des points B, D et E sont des solutions de cette équation.
B(12;0;0) $3\times12+2\times0+6\times0-36=36-36=0$
D(0;18;0) $3\times0+2\times18\times6\times0-36=36-36=0$
E(0;0;6) $3\times0+2+3\times0+6\times6-36=36-36=0$
Conclusion
(EBD) : 3x+2y+6z-36=0

2.a. Les coordonnées du point G sont (12;18;6).

(AG) est la droite passant par A(0;0;0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}12\\18\\6\end{pmatrix}$.

On obtient pour représentation paramétrique :

$$(AG)\ \begin{cases}x=12t\\y=18t\\z=6t\end{cases}\quad t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

2.b. Pour déterminer l'intersection du plan(EBD) et de la droite (AG), on résout le système :

$$\begin{cases}3x+2y+6z-36=0\\x=12t\\y=18t\\z=6t\end{cases}$$

On obtient : $3\times12t+2\times18t+6\times6t-36=0 \Leftrightarrow 36t+36t+36t-36=0 \Leftrightarrow t=\frac{36}{108}=\frac{1}{3}$

donc $x=12\times\frac{1}{3}=4$ $y=18\times\frac{1}{3}=6$ $z=6\times\frac{1}{3}=2$.

Conclusion
Le plan (EBD) et la droite (AG) sont sécants en K(4;6;2).

3. (EBD) : 3x+2y+6z-36=0 $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EBD) $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}12\\18\\6\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires donc **la droite (AG) n'est pas orthogonale au plan (EBD).**

4.a. M est le milieu de [ED] E(0;0;6) D(0;18;0) donc M(0;9;3).
B(12;0;0) K(4;6;2)

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-12\\9\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-8\\6\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BK}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires et les points B ; M et K sont alignés.

4.b. Le point K est le point d'intersection des droites (AG) et (BM) (en bleu sur le dessin).

5.a. Les plans (ADE) et (EBD) sont sécants leur intersection est la droite (DE).
P est le plan parallèle à (ADE) passant par K (appartenant au plan (EBD)).
Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les deux droites d'intersection sont parallèles.
La droite d'intersection des plans P et (EBD) est la droite parallèle à (DE) passant par K.

5.b. On trace la droite parallèle à la droite (DE) passant par K et on ne conserve que le segment intérieur au triangle EBD (en rouge sur le dessin).

ANNEXE
à rendre avec la copie