EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0=1$, $v_0=0$ et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On a calculé les premiers termes de la suite (v_n) :

u_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v_n	0	1	4	15	56	209	780	2911	10864	40545	151316	564719	2107560

1. Conjecturer les valeurs possibles du chiffre des unités des termes de la suite (v_n).

2. On admet que pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix}u_{n+3}\\ v_{n+3}\end{pmatrix}=M^3\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$.

2.a. Justifier que pour tout entier naturel n, $\begin{cases}u_{n+3}=26u_n+45v_n\\ v_{n+3}=15u_n+26v_n\end{cases}$

2.b. En déduire que pour tout entier naturel n : $v_{n+3}\equiv v_n\ (5)$

3. Soit r entier naturel fixé. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel q, $v_{3q+r}\equiv v_r\ (5)$.

4. En déduire que pour tout entier naturel n le terme v_n est congru , à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.

5. Conclure quant à l'ensemble des valeurs prises par le chiffre des unités des termes de la suite (v_n).

Partie B

L'objectif de cette partie est de démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant la matrice M.
Pour cela, on effectue un raisonnement par l'absurde et on suppose que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel.

Dans ce cas, $\sqrt{3}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls, avec q le plus petit entier naturel possible.

1. Montrer que $q<p<2q$.

2. On admet que la matrice M est inversible. Donner son inverse M^{-1} (aucune justification n'est attendue).

Soit le couple (p';q') défini par $\begin{pmatrix}p'\\ q'\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$.

3.a. Vérifier que $p'=2p-3q$ et que $q'=-p+2q$

3.b. Justifier que (p';q') est un couple d'entiers relatifs.

3.c. On rappelle que $p=q\sqrt{3}$. Montrer que $p'=q'\sqrt{3}$.

3.d. Montrer que $0<q'<q$.

3.e. En déduire que $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.

CORRECTION

Partie A

1. Par lecture du tableau, on obtient pour valeurs possibles du chiffres des unités des termes de la suite (v_n) :
0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ou 9.

2. On admet que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

2.a. $M=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad M^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad M^3=M^2\times M=\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$

On peut utiliser la calculatrice pour obtenir M^3.

$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ v_{n+3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26\,u_n+45\,v_n \\ 15\,u_n+26\,v_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+3}=26\,u_n+45\,v_n \\ v_{n+3}=15\,u_n+26\,v_n \end{cases}$

2.b. $15=5\times 3$ donc $15\equiv 0\ (5)$ et $26=5\times 5+1$ donc $26\equiv 1\ (5)$

pour tout entier naturel n

$15\,u_n+26\,v_n\equiv 0\times u_n+1\times v_n\ (5)$ donc $v_{n+3}\equiv v_n\ (5)$

3. r est un entier naturel fixé.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel q, on a : $v_{3q+r}\equiv v_r\ (5)$.

<u>Initialisation</u>

Pour q=0 $v_{3\times 0+r}=v_r$ donc $v_{0\times q+r}\equiv v_r\ (5)$

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel q on suppose que $v_{3q+r}\equiv v_r\ (5)$ et on doit démontrer que $v_{3(q+1)+r}\equiv v_r\ (5)$.

Or $v_{3(q+1)+r}=v_{(3q+r)+3}$ et en utilisant le résultat de la question 2.b. on obtient $v_{3(q+1)+r}\equiv v_{3q+r}\ (5)$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence $v_{3q+r}\equiv v_r\ (5)$ donc $v_{3(q+1)+r}\equiv v_r\ (5)$.

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel q $v_{3q+r}\equiv v_r\ (5)$.

4. Pour tout entier naturel n, on effectue la division euclidienne de n par 3 on obtient $n=3q+r \quad 0\leqslant r<3$.

Si $r=0$ alors $v_n\equiv v_0\ (5)$ et le chiffre des unités de v_n est congru à 0 modulo 5.

Si $r=1$ alors $v_n\equiv v_1\ (5)$ et le chiffre des unités de v_n est congru à 1 modulo 5.

Si $r=2$ alors $v_n\equiv v_2\ (5)$ et le chiffre des unités de v_n est congru à 4 modulo 5.

5. Pour tout entier naturel n :

$v_n\equiv u\ (10)$ u est le chiffres des unités de v_n.

$10=5\times 2$ et $u\equiv 0\ (5)$ ou $u\equiv 1\ (5)$ ou $u\equiv 4\ (5)$.

$u\equiv 0\ (5) \Leftrightarrow (\ u\equiv 0\ (10)$ ou $u\equiv 5\ (10)\ )$

$u\equiv 1\ (5) \Leftrightarrow (\ u\equiv 1\ (10)$ ou $u\equiv 6\ (10)\ )$

$u\equiv 4\ (5) \Leftrightarrow (\ u\equiv 4\ (10)$ ou $u\equiv 9\ (10)\ )$

En utilisant le tableau donné,on peut conclure que **les valeurs possibles du chiffre des unités de v_n sont : 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9.**

Partie B

1. $1<3<4$ la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc :
$\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$ soit $1<\sqrt{3}<2$.

Si $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ (p et q entiers naturels non nuls) alors $1<\frac{p}{q}<2 \quad\Leftrightarrow\quad q<p<2q$

2. En utilisant la calculatrice, on obtient : $M^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

3.a. $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p'=2p-3q \\ q'=-p+2q \end{cases}$.

3.b. p et q sont des entiers naturels donc p' et q' sont des différences de produits d'entiers naturels donc p' et q' sont des entiers relatifs.

3.c. On a : $p=q\sqrt{3}$.

$p'=2p-3q=2q\sqrt{3}-3q=\sqrt{3}q(2-\sqrt{3})$

$q'=-p+2q=-q\sqrt{3}+2q=q(2-\sqrt{3})$

<u>conséquence</u>

$p'=q'\sqrt{3}$

3.d. on a $q<p<2q$ donc $-q>-p>-2q$ soit $-2q<-p<-q$.

Or $q'=-p+2q$ on obtient $0<-p+2q<q$ donc $0<q'<q$

3.e. On a $p'=q'\sqrt{3}$ donc $\sqrt{3}=\dfrac{p'}{q'}$ et q' est un entier naturel strictement inférieur à q.

Remarque : p' est un entier relatif de même signe que q' donc p' est aussi un entier naturel.

Il y contraction avec l'hypothèse : q est le plus petit entier naturel tel que $\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$.

Donc l'hypothèse que l'on a faite est fausse.

<u>Conclusion</u>

$\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

