EXERCICE 1 — 6 points

Les parties A et B peuvent être abordées de façon indépendante.

Deux groupes de scientifiques,des spécialistes en environnement et les biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A – Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe des spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentent sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $T_0=0{,}9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1}=T_n-0{,}1\,T_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estime qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

2. On définit la fonction f sur l'intervalle [0;1] par $f(x)=x-0{,}1\,x^2$.
Ainsi la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $T_{n+1}=f(T_n)$.

2.a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [0;1].

2.b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant T_{n+1}\leqslant T_n\leqslant 1$.

2.c. La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

2.d. Le groupe de spécialistes de l'environnement affirme que, selon ce modèle le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

Partie B

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1^{er} janvier 2018, il y avait été dénombré 250 grenouilles.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $P(t)=\dfrac{1000}{0{,}4+3{,}6\,e^{-0{,}5\,t}}$ où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1^{er} janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où P' est une fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0\in[0\,;+\infty]$ telle que $P(t_0)=2000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.

4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

CORRECTION

Partie A

1. En 2022=2018+4 le taux de de disponibilité des ressources sera T_4 .

$T_1=T_0-0,1\times T_0^2=0,9-0,1\times 0,81=0,819$ $T_2=T_1-0,1\times T_1^2=0,752$ à 10^{-3} près.

$T_3=T_2-0,1\times T_2^2=0,695$ à 10^{-3} près. $T_4=T_3-0,1\times T_2^2=0,647$ à 10^{-3} près.

En 2022 le taux de disponibilité de ressources n'est pas proche de 0,4.

2.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1], $f(x)=x-0,1x^2$.

f est dérivable sur [0;1].

$f'(x)=1-0,2x$

$1-0,2x=0 \Leftrightarrow 1=0,2x \Leftrightarrow x=\frac{1}{0,2}=5$

$1-0,2x>0 \Leftrightarrow 1>0,2x \Leftrightarrow 5>x$

Donc $f'(x)>0$ pour tout x appartenant à [0;1].

f est croissante sur [0;1].

$f(0)=0$ et $f(1)=1-0,1\times 1^2=0,9$.

Tableau de variation de f

x	0	1
f '(x)	+	
f(x)	0 ↗	0.9

2.b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant T_{n+1}\leqslant T_n\leqslant 1$.

Initialisation

$T_0=0,9$ et $T_1=0,819$ donc $0\leqslant T_1\leqslant T_0\leqslant 1$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $0\leqslant T_{n+1}\leqslant T_n\leqslant 1$ et on doit démontrer que $0\leqslant T_{n+2}\leqslant T_{n+1}\leqslant 1$.

f est croissante sur [0;1] donc si $0\leqslant T_{n+1}\leqslant T_n\leqslant 1$ alors $f(0)\leqslant f(T_{n+1})\leqslant f(T_n)\leqslant f(1)$.

Or $f(0)=0$; $f(T_{n+1})=T_{n+2}$; $f(T_n)=T_{n+1}$ et $f(1)=0,9$ donc $0\leqslant T_{n+2}\leqslant T_{n+1}\leqslant 0,9\leqslant 1$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $0\leqslant T_{n+1}\leqslant T_n\leqslant 1$.

2.c. Pour tout entier naturel n, $0\leqslant T_{n+1}\leqslant T_n$ donc la suite (T_n) est décroissante et minorée par 0.

Conséquence

La suite (T_n) est convergente.

2.d. Pour pouvoir répondre à la question, on considère l'algorithme :

```
n ← 0
T ← 0,9
Tant que T⩾0,4
    T ← T−0,1×T²
    n ← n+1
Fin Tant que
Afficher n et T
```

L'énoncé affirme que l'on trouve une valeur de n inférieure ou égale à 20.
On peut utiliser a calculatrice pour déterminer les valeurs de n et T.
On obtient $n=14$ et $T=0{,}385$.

On propose une programmation (non demandée) en Python.

```
print('Début de programme')
from math import*
n=0
T=0.9
while T>=0.4:
    T=T-0.1*T**2
    n=n+1
print("n="+str(n))
print("T="+str(T))
print('Fin de programme')
```

Exécution

```
Début de programme
n=14
T=0.38477689041935126
Fin de programme
```

Conclusion
Le taux de disponibilité des ressources sera inférieur à 0,4 pour la première fois en 2018+14= **2032.**
La valeur de T_{14} sera égale à **0,385** à 10^{-3} près.
$14\leqslant 20$ donc **l'affirmation est conforme au modèle**.

Partie B

1. Pour tout t appartenant à $[0;+\infty[$, $P(t)=\dfrac{1000}{0{,}4+3{,}6\,e^{-0{,}5\,t}}$.

P est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$(e^{-0{,}5\,t})'=-0{,}5\,e^{-0{,}5\,t}$; $(0{,}4+3{,}6\,e^{-0{,}5\,t})'=3{,}6\times(-0{,}5\,e^{-0{,}5\,t})=-1{,}8\,e^{-0{,}5\,t}$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$

$$P'(t)=\frac{-1000\times(-1{,}8\,e^{-0{,}5\,t})}{(0{,}4+3{,}6\,e^{-0{,}5\,t})^2}=\frac{1800\,e^{-0{,}5\,t}}{(0{,}4+3{,}6\,e^{-0{,}5\,t})^2}$$

Pour tout t appartenant à $[0;+\infty[$, $e^{-0{,}5\,t}>0$ donc $P'(t)>0$ et $P'(t)$ est du signe + sur $[0;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty}(-0{,}5\,t)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-0{,}5\,t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\dfrac{1000}{0{,}4}=$ **2500.**

Tableau de variation de P

t	0	$+\infty$
P'(t)	+	
P(t)	250 ↗	2500

$$P(0)=\frac{1000}{0{,}4+3{,}6\times 1}=\frac{1000}{4}=250$$

3. P est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans [250;2500[.
$250<2000<2500$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un réel t_0 unique appartenant à $[0;+\infty[$ tel que $P(t_0)=2000$.
En utilisant la calculatrice , on obtient : $P(7)=1965{,}75$ et $P(8)=2146{,}22$ donc $7<t_0<8$.
$P(7{,}1)=1986{,}46$ et $P(7{,}2)=2006{,}56$ donc **7,2 est une valeur approchée de t_0 à 10^{-1} près.**

4. P est croissante sur $[0;+\infty[$.
$P(7)<2000$ et $P(8)>2000$ donc **la première année pour laquelle, la population de l'étang aura dépassé 2000 est 2018+8=2026.**