EXERCICE 2 5 points

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} *près.*

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...
Une suite de huit bits est appelé octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.
On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

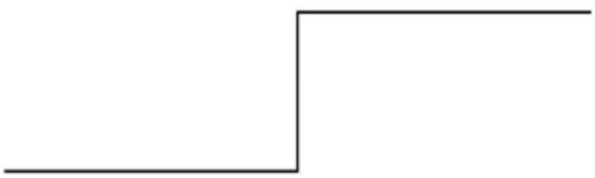
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

3. Que peut penser de l'affirmation suivante : « la probabilité qu'exactement deux bits de mal transmis l'octet soit au moins égale à 3 est négligeable » ? Argumenter.

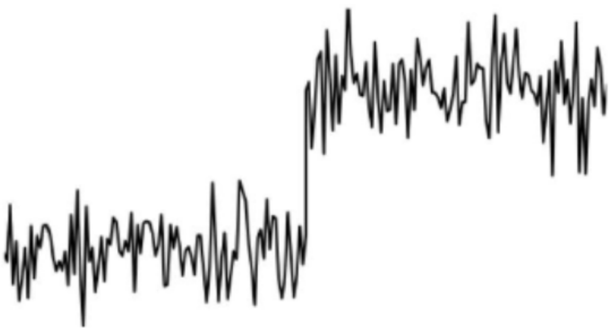
Partie B

Les erreurs de transmission des bits sont liées à la présence de bruits parasites sur le canal de communication comme l'illustre la figure ci-dessous :

Transmission idéale de 0 puis 1



Transmission réelle, bruitée, de 0 puis 1



On admet que l'information d'un bit reçu, incluant le bruit, peut être modélisée à l'aide d'une variable aléatoire continue qui suit une loi normale dont l'espérance est liée à la valeur du bit envoyé.
On envoie un bit de valeur 1. On admet que l'information reçue d'un bit de valeur 1 peut être modélisée par une variable aléatoire R qui suit la loi normale normale d'espérance 1 et d'écart-type 0,3.
On considère que le bit reçu n'est pas correctement interprété lorsque la valeur de R est inférieure ou égale à 0,4.
Calculer la probabilité que le bit ne soit pas correctement interprété.

Partie C

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet.
On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.

Une étude statistique a permis d'obtenir que :
. la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;
. la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;
. si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;
. si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
. si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs , la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les événements suivants :

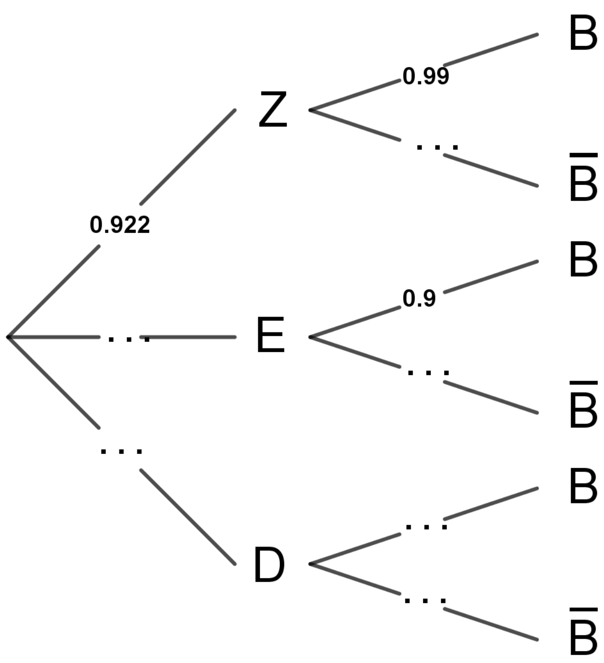
. Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
. E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
. D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
. B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Compléter l'arbre pondéré de l'annexe à rendre avec la copie.

2. Quelle la probabilité que l'octet soit transmis avec une exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?

3. Calculer la probabilité de l'événement B.

ANNEXE
à rendre avec la copie



CORRECTION

Partie A

1. On considère l'épreuve de Bernoulli : transmission d'un bit.
Succès : « le bit est mal transmis » probabilité de Succès p=0,01.
Échec : « le bit est bien transmis » probabilité de l'échec q=0,99.
Pour un octet on effectue 8 épreuves indépendantes.
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 8 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres : n=8 et p=0,01.

2. $P(X=2)=\binom{8}{2}\times 0{,}01^2\times 0{,}99^6=$ **0,0026** à 10^{-4} près. (En utilisant la calculatrice).

3. $P(X=0)=0{,}99^8=0{,}9227$ **à** 10^{-4} près.
$P(X=1)=\binom{8}{1}\times 0{,}01^1\times 0{,}99^7=8\times 0{,}01\times 0{,}99^7=0{,}0746$.
$P(X\geqslant 3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$ **0,0001** à 10^{-4} près.
Cette probabilité est « négligeable » par rapport aux probabilité précédentes.

Partie B

R est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 1 et d'écart-type 0,3.
Le bit reçu n'est pas correctement interprété si et seulement si $(R\leqslant 0{,}4)$.
En utilisant la calculatrice on obtient : $P(R\leqslant 0{,}4)=$ **0,0228** à 10^{-4} près.
On peut remarquer que l'on doit calculer $P(R\leqslant\mu-2\sigma)$ mais on ne connaît pas le résultat à 10^{-4} près.

Partie C

1. On a : P(Z)=0,922 et P(E)=0,075 donc P(D)= 1-0,922-0,075=0,003.
$P_Z(B)=0{,}99$ donc $P_Z(\bar{B})=1-0{,}99=0{,}01$
$P_E(B)=0{,}9$ donc $P_E(\bar{B})=1-0{,}9=0{,}1$
$P_D(B)=0{,}99$ donc $P_D\bar{B}$¿$=1-0{,}99=0{,}01$
On complète l'arbre donné en annexe.

2. $P(E\cap B)=P(E)\times P_E(B)=0{,}075\times 0{,}9=$ **0,0675.**

3. En utilisant la formule des probabilités totales.
$P(B)=P(Z\cap B)+P(E\cap B)+P(D\cap B)$
$P(Z\cap B)=0{,}922\times 0{,}99=0{,}9128$
$P(D\cap B)=0{,}003\times 0{,}99=0{,}0030$ à 10^{-4} près.
$P(B)=0{,}9128+0{,}0675+0{,}003=$ **0,9833** à 10^{-4} près.

ANNEXE
à rendre avec la copie