EXERCICE 3 — 4 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. On considère le nombre complexe $z=1+i\sqrt{3}$.

Affirmation 1 : Le nombre complexe z^2 est un nombre réel positif.

Affirmation 2 : L'argument du nombre complexe z^{2019} vaut 0 modulo 2π .

Dans ce qui suit, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct . $(O;\vec{u};\vec{v})$.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2-3z+5=0$.

Affirmation 3 : Cette équation admet deux solutions dont les images sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

3. À tout point M d'affixe z du plan complexe, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z'=\bar{z}(1-z) .$$

Affirmation 4 : Il existe une infinité de points M confondus avec leur image M'.

CORRECTION

1. **Affirmation 1 :** **FAUSSE**

Justification

$z^2=(1+i\sqrt{3})^2=1+2i\sqrt{3}-3=-2+2i\sqrt{3}$

z^2 n'est pas un nombre réel positif.

Affirmation 2 : **FAUSSE**

Justification

$z=1+i\sqrt{3}$ $\quad |1+i\sqrt{3}|^2=1+3=4$ $\quad$ donc $\quad \arg(z)\equiv\alpha \ (2\pi)$

$\cos(\alpha)=\frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\alpha\equiv\frac{\pi}{3} \ (2\pi)$

$z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad e^{2019}=2^{2019}e^{2019\times\frac{\pi}{3}}$ $\quad z^{2019}=2^{2019}e^{i673\pi}$

$673\pi=672\pi+\pi=336\times(2\pi)+\pi$

$z^{2019}=2^{2019}e^{i\pi}$

$\arg(z^{2019})\equiv\pi \ (2\pi)$

2. **Affirmation 3 :** **FAUSSE**

Justification

$2z^2-3z+5=0$

$\Delta=9-4\times2\times5=-31=(i\sqrt{31})^2$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$z_1=\frac{3+i\sqrt{31}}{4}$ $\qquad z_2=\frac{3-i\sqrt{31}}{4}$

Les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ ont la même abscisse non nulle : $\frac{3}{4}$ donc ces deux points ne sont pas symétriques par rapport à l'origine.

3. **Affirmation 4 :** **FAUSSE**

Justification

$M'=M \Leftrightarrow z'=z \Leftrightarrow \bar{z}(1-z)=z \Leftrightarrow \bar{z}-\bar{z}\times z=z$

$z=x+iy$ $\quad$ x et y sont des nombres réels

$\bar{z}=x-iy$ $\quad \bar{z}\times z=|z|^2=x^2+y^2$

$\bar{z}-\bar{z}\times z=z \Leftrightarrow x-iy+x^2+y^2=x+iy \Leftrightarrow x^2+y^2-2iy=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \{x=y=0$.

Il n'existe qu'un point confondu avec son image, c'est l'origine du repère.