## EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie,** on considère le cube ABCDEFGH de côté 6 cm dans le repère orthonormé $(A;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, l'unité étant le cm.
On admet que le point I a pour coordonnées (6;0;3) dans ce repère.
On appelle L le milieu de [FG].
On appelle P le plan défini par les trois points E, I et L.
On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule $V=\dfrac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.

**1.a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

**1.b.** Déterminer une équation cartésienne du plan P.

**2.** Justifier que le volume du tétraèdre FELI est $9\,\text{cm}^3$.

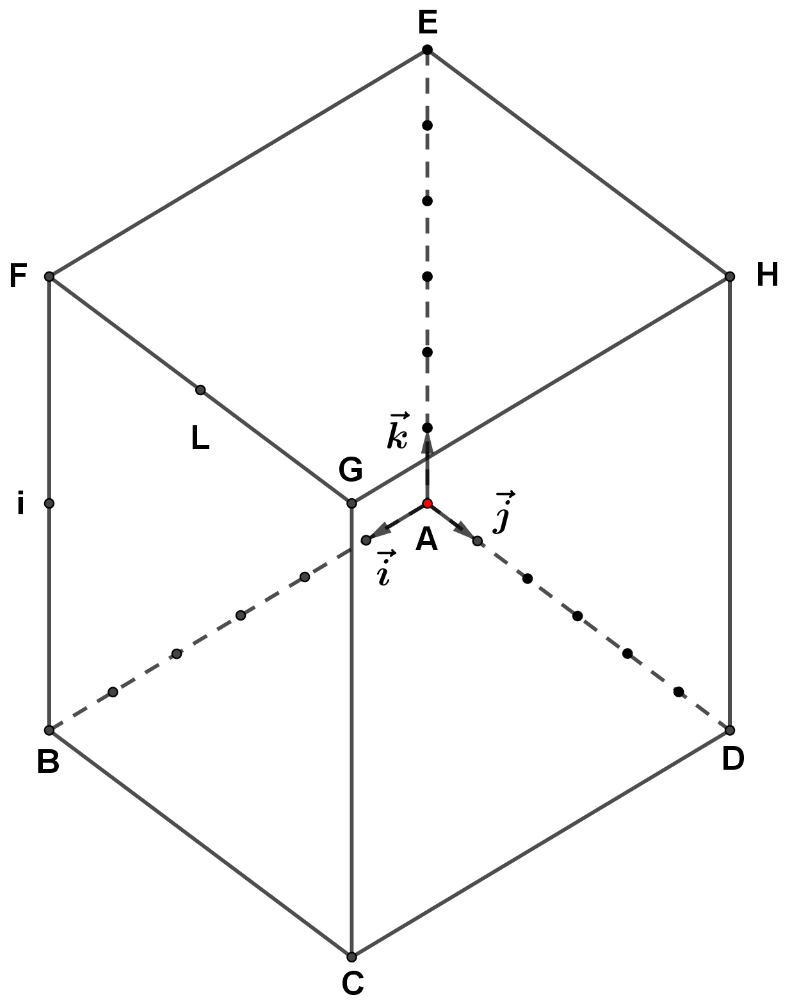
**3.a.** Soit $\Delta$ la perpendiculaire au plan P passant par F. Justifier que la droite $\Delta$ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=t+6\\y=-2t\\z=2t+6\end{cases}$ $t$ décrit $\mathbb{R}$

**3.b.** Montrer que l'intersection de la droite $\Delta$ et du plan P est le point $K\left(\dfrac{16}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{14}{3}\right)$.

**4.** Calculer l'aire en $\text{cm}^2$ du triangle ELI.

**5.** Tracer sur le graphique fourni en **annexe à rendre avec la copie**, La section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle au plan P passant par le point G et en donner la nature précise sans justification.

**ANNEXE**
**à rendre avec la copie**



**CORRECTION**

**1.a.** $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P=(EIL) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de par exemples $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EL}$.

I(6;0;3) L(6;3;6) E(0;0;6)

$\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{EI}=1\times 6+0\times(-2)-3\times 2=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{EL}=1\times 6+3\times(-2)+0\times 2=0$

donc $\vec{n}$ **est un vecteur normal au plan P.**

**1.b.** M(x;y:z) E(0;0;6) $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-6\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

M appartient au plan P $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{EM}=0$ $\Leftrightarrow$ $1\times x-2\times y+2\times(z-6)=0$ $\Leftrightarrow$ **x-2y+2z-12=0**

**2.** On considère le tétraèdre FELI.

On choisit pour base le triangle FLI (rectangle en F) et pour hauteur EF (arête du cube).

EF=6 cm I(6;0;3) L(6;3;6) F(6;0;6)

$IF^2=(6-6)^2+(0-0)^2+(6-3)^2=3^2=9$ IF=3 cm

$FL^2=(6-6)^2+(3-0)^2+(6-6)^2=3^2=9$ FL=3 cm.

L'aire du triangle IFL est égale à $\frac{3\times 3}{2}=\frac{9}{2}$ $cm^2$.

Le volume du tétraèdre FELI est égal à : $\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}+6=9$ $cm^3$.

**3.a.** La droite $\Delta$ est la droite passant par F est de vecteur directeur $\vec{n}$.

F(6;0;6) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ $\Delta$ : $\begin{cases}x=t+6\\y=-2t\\z=2t+6\end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

**3.b.** Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite $\Delta$ et du plan P, on résout le système : $\begin{cases}x-2y+2z-12=0\\x=t+6\\y=-2t\\z=2t+6\end{cases}$

On obtient : t+6-2(-2t)+2(2t+6)-12=0 $\Leftrightarrow$ t+6+4t+4t+12-12=0 $\Leftrightarrow$ 9t+6=0 $\Leftrightarrow$ $t=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$

$x=-\frac{2}{3}+6=\frac{16}{3}$ $y=-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$ $z=2\times\left(-\frac{2}{3}\right)+6=\frac{14}{3}$.

$K\left(\frac{16}{3};\frac{4}{3};\frac{14}{3}\right)$

**4.** On note A l'aire,en $cm^2$, du triangle ELI.

FK est la hauteur du tétraèdre ELIF, issue de F.

$F(6;0;6)$ $K\left(\frac{16}{3};\frac{4}{3};\frac{14}{3}\right)$.

$$FK^2=\left(\frac{16}{3}-6\right)^2+\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+\left(\frac{14}{3}-6\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left[\frac{4}{3}\right]^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4+16+16}{9}=\frac{36}{9}=4$$

$$FK=2 \quad 9=\frac{1}{3}\times A\times FK \iff 9=\frac{1}{3}\times A\times 2 \iff A=\frac{9\times 3}{2}=\frac{27}{2}=13{,}5 \ \text{cm}^2$$

**5.** M est le milieu de [EH] et N est le milieu de [AE].
La section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle au plan P passant par G est le quadrilatère GMNB.
Les segments [BG] et [MN] sont parallèles et les segments [GM] et [BN] ont la même longueur donc le quadrilatère GMNB est un **trapèze isocèle** de grande base [GB].

*Remarque*
On peut calculer l'aire du triangle EIL sans calculer le volume du tétraèdre FEIL.
On remarque que le triangle EIL est isocèle en E $\left(EI=EL=\sqrt{45}=3\sqrt{5}\right)$.
Q est le milieu de [IL].

$$A=\frac{1}{2}\times IL\times EQ$$

$$I(6;0;3) \quad L(6;3;6) \quad Q\left(6;\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right) \quad E(0;0;6)$$

$$IL^2=(6-6)^2+(3-0)^2+(6-3)^2=18 \quad IL=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$EQ^2=(6-0)^2+\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(6-\frac{9}{2}\right)^2=36+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=\frac{162}{4} \quad EQ=\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$A=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\frac{9\times\sqrt{2}}{2}=\frac{54}{4}=13{,}5 \ \text{cm}^2$$

**ANNEXE**
**à rendre avec la copie**