Exercice 1 commun à tous les candidats 5 points

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :
. si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
. si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'événement « l'athlète est dopé » et T l'événement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'événement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(T)=0{,}083$.

3.a. Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

3.b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'événement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95.
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.

1. Dans cette question 1, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

1.a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

1.b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

1.c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

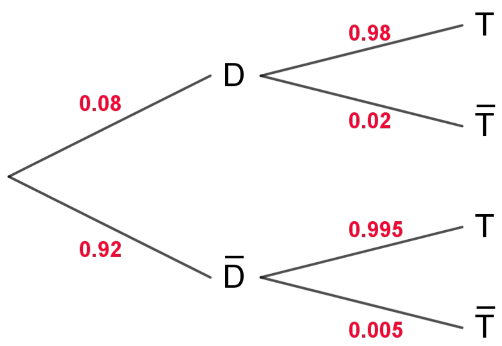
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

CORRECTION

Partie 1

1. L'énoncé précise :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0{,}98$ donc :
  $P_D(T)=0{,}98$ et $P_D(\overline{T})=1-P_D(T)=1-0{,}98=0{,}02$
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0{,}995$ donc :
  $P_{\overline{D}}(\overline{T})=0{,}995$ et $P_{\overline{D}}(T)=1-P_{\overline{D}}(\overline{T})=1-0{,}995=0{,}005$
- On admet que $P(D)=0{,}08$ donc $P(\overline{D})=1-P(D)=1-0{,}8=0{,}92$
- On obtient l'arbre pondéré traduisant la situation.



2. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(T)=P(D\cap T)+P(\overline{D}\cap T)=P(D)\times P_D(T)+P(\overline{D})\times P_{\overline{D}}(T)=0{,}08\times 0{,}98+0{,}92\times 0{,}005$

$P(T)=0{,}0784+0{,}0046=0{,}083$.

3.a. On nous demande de calculer $P_T(D)$.

$$P_T(D)=\frac{P(D\cap T)}{P(T)}=\frac{0{,}0784}{0{,}083}=0{,}945$$ (arrondi à 10^{-3}).

3.b. La probabilité de l'événement « un athlète présentant un test positif est dopé » est l'événement $P_D(T)$.
Or $P_D(T)=0{,}945<0{,}95$.
Donc le test proposé par le laboratoire ne sera pas commercialisé.

Partie B

1.a. On suppose que le nombre d'athlètes en compétition soit assez grand pour que l'on puisse considérer le choix des 5 athlètes comme 5 tirages indépendants avec remise.
On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
on choisit au hasard un athlète,
succès est l'événement « le test est positif » la probabilité de succès est $p=0{,}103$
échec est l'événement « le test est négatif » la probabilité de l'échec est $q=1-p=1-0{,}103=0{,}897$.
On effectue 5 épreuves indépendantes et X est la variable aléatoire égale au nombre de succès pour 5 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}103$.

1.b. $E(X)=np=5\times 0{,}103=0{,}515$

1.c. A est l'événement « au moins un des 5 athlètes présente un test positif ».
$\overline{A}$ est l'événement « les 5 athlètes ont un test négatif ».
$P(\overline{A})=0{,}897^5=0{,}581$ (arrondi à 10^{-3}) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}581=0{,}419$.

2. n est un entier naturel non nul.
On contrôle n athlètes.
La probabilité de l'événement « au moins un athlète présente un test positif » est : $1-0{,}897^n$.
$1-0{,}897^n \geqslant 0{,}75 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}25 \geqslant 0{,}897^n$
la fonction llogarithme népérien ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$
$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}25) \geqslant \ln(0{,}897^n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0{,}25) \geqslant n \times \ln(0{,}897)$
$0<0{,}897<1$ donc $\ln(0{,}897)<0$
$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}897)} \leqslant n$
$\dfrac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}897)} = 12{,}753$ (arrondi à 10^{-3}) et n est un entier naturel
$\Leftrightarrow \quad 13 \leqslant n$
Il faut contrôler au minimum 13 athlètes pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75.