Exercice 2 commun à tous les candidats 5 points

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.
Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,6 \\ u_{n+1} = 0,75\, u_n (1 - 0,15\, u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année 2020+n.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;1] par $f(x) = 0,75\,x(1 - 0,15\,x)$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0;1] et dresser son tableau de variations.

3. Résoudre dans l'intervalle [0;1] l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4.a. Démontrer par récurrence que pour entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

4.b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4.c. Déterminer la limite L de la suite (u_n).

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

5.a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

5.b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace():
  u=0.6
  n=0
  while u>0.02:
    u=0.75*u*(1-0.15*u)
    n=n+1
  return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction **menace().**
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1. $u_1 = 0,75u_0(1-0,15u_0) = 0,75\times0,6\times(1-0,15\times0,6) = 0,45\times(1-0,09) = 0,45\times0,91 = 0,4095$

Le nombre d'individus au début de l'année 2021 est:410.

$u_2 = 0,75u_1(1-0,15u_1) = 0,307125\times0,938575 = 0,288$ à 10^{-3} près.

Le nombre d'individus au début de l'année 2022 est : 288.

2. $f(x) = 0,75x(1-0,15x) = 0,75x - 0,1125x^2$

$f'(x) = 0,75 - 0,225x$

$0,75-0,225x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{0,75}{0,225} = \dfrac{75}{225} = \dfrac{10}{3}$

$0,75-0,225x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{0,75}{0,225} = \dfrac{10}{3} > x$

$x\in[0;1]$ donc $x < \dfrac{10}{3}$ et $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur [0;1].

$f(0) = 0$ et $f(1) = 0,75\times0,85 = 0,6375$.

x	0		1
f '(x)		+	
f(x)	0	↗	0.6375

3. $f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 0,75x - 0,1125x^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad -0,25x - 0,1125x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -0,25x(1+0,45x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{1}{0,45} < 0\right)$.

L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle [0;1] : 0.

4.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, ou a : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

<u>Initialisation</u>

Pour n=0 $u_0 = 0,6$ et $u_1 = 0,4095$, on a $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$.

Donc la propriété est vérifiée pour n=0.

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ et on doit démontrer que l'on a $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

On a $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ or f est une fonction croissante sur [0;1].

Si $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n = 1$ alors $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ soit $f(0) \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant f(1)$.

On a $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,6375 \leqslant 1$ donc $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

4.b. Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ alors (u_n) est une suite décroissante.

(u_n) est une suite décroissante, minorée par 0 donc (u_n) est une suite convergente.

4.c. On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc $0 \leqslant L \leqslant 1$.

Pour tout entier naturel n, $f(u_n)=u_{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=L$ et $\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=f(L)$ car f est continue sur [0;1].
Donc $f(L)=L$ et L est une solution de l'équation $f(x)=x$ appartenant à l'intervalle [0;1].
Conséquence : $L=0$.

5.a. $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ et (u_n) est une suite décroissante et $u_0=0{,}6$ donc à partir d'un certain rang N, tous les termes u_n tels que $n\geqslant N$ seront inférieurs à 0,02 (20 individus) et l'espèce sera menacée d'extinction et le biologiste a raison.

5.b. On exécute le programme donné et on obtient : 11 donc $u_{11}\leqslant 20$.
Au début de l'année 2031 le nombre d'individus sera inférieur ou égal à 20.