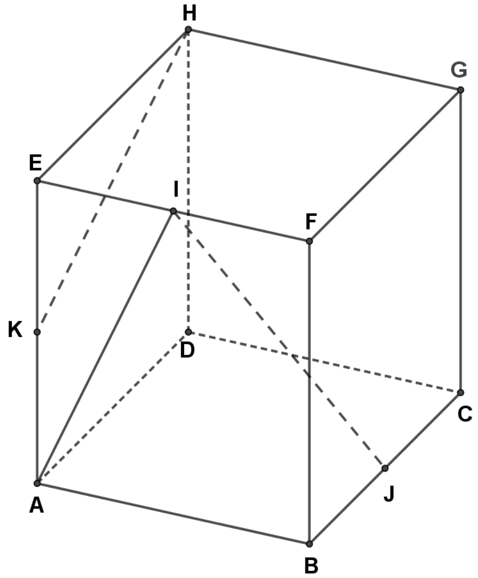
Exercice 3 commun à tous les candidats 5 points

Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

2.a. Donner les coordonnées des points I et J.

2.b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan P d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies parallèles représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x=3+t \\ y=8-2t \\ z=-2+3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \begin{cases} x=4+t \\ y=1+t \\ z=8+2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan P.

5. Montrer que le point $L(4;0;3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5;3;1)$ sur le plan P.

CORRECTION

1. Les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles car elles ne sont pas coplanaires.
La droite (KH) est contenue dans le plan (AEH). Si la droite (AI) était parallèle à (KH) alors la droite (AI) serait contenue dans le plan (AEH).
Or le point I appartient au plan (AEF) et n'appartient à la droite (AE) donc n'appartient pas au plan (AEH) et la droite (AI) n'est pas contenue dans le plan (AEH) donc n'est pas parallèle à (AI).

2.a. On donne les coordonnées des points de la figure.
$A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $C(1;1;0)$ $D(0;1;0)$ $E(0;0;1)$ $F(1;0;1)$ $G(1;1;1)$ $H(0:1;1)$

I est le milieu de [EF] $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ J est le milieu de [BC] $J\left(1;\frac{1}{2};0\right)$.

2.b. $\vec{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$ $\vec{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{AE}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{AE}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires si et seulement s'ils existent des nombres réels a et b tel que : $\vec{IJ}=a\vec{AE}+b\vec{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}=0-a+1\times b\\ \frac{1}{2}=0\times a+1\times b\\ -1=1\times a+0\times b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}=b\\ \frac{1}{2}=b\\ -1=a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=\frac{1}{2}\end{cases} \quad \text{donc} \quad \vec{IJ}=-\vec{AE}+\frac{1}{2}\vec{AC}.$$

Les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{AE}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires.

3. Les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
$\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_1 ; $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2.
Les coordonnées des vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

4. $P: \ x+3y-2z+2=0$ $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.
$\vec{N}.\vec{u_2}=1\times 1+3\times 1-2\times 2=1+3-4=0$ donc la droite d_2 est parallèle à P.

5. $L(4;0;3)$ $M(5;3;1)$ $\vec{ML}\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$ $\vec{ML}=-\vec{N}$.
(ML) est une droite orthogonale au plan P.
$4+3\times 0-2\times 3+2=4-6+2=0$ donc le point L appartient au plan P.
Donc L est le projeté orthogonal de M sur P.