Exercice A au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE A

Principaux domaines abordés:
Fonction exponentielle; convexité

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 :

Pour tous réels a et b, $(e^{a+b})^2 = e^{2a} + e^{2b}$

Affirmation 2 :

Dans le plan, muni d'un repère, la tangente au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 + (3-x)e^x$ admet pour équation réduite $y = 2x + 1$.

Affirmation 3 :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = 0$.

Affirmation 4 :

L'équation $1 - x + e^{-x} = 0$ admet une seule solution appartenant à l'intervalle $[0;2]$

Affirmation 5 :

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 5x + e^x$ est convexe.

CORRECTION

Affirmation 1 : **FAUSSE**

Preuve

Pour démontrer que l'affirmation est fausse, il suffit de donner un contre exemple.

$a=b=0$ $\quad (e^{0+0})^2=(e^0)^2=1^2=1$ $\quad e^{2\times 0}+e^{2\times 0}=e^0+e^0=1+1=2$ $\quad 1\neq 2$

Remarque

$(e^{a+b})^2=(e^a\times e^b)^2=(e^a)^2\times(e^b)^2=e^{2a}\times e^{2b}$;

Affirmation 2 : **VRAIE**

Preuve

$f(x)=-2+(3-x)e^x$ $\quad f(0)=-2(3-0)e^0=-2+3=1$ $\quad A(0;1)$.

$2\times 0+1=1$ donc le point A appartient à la droite d'équation réduire : $y=2x+1$.

$u(x)=3-x$ $\quad u'(x)=-1$ $\quad v(x)=e^x$ $\quad v'(x)=e^x$

$f'(x)=-1\times e^x+(3-x)\times e^x=(-1+3-x)e^x=(2-x)e^x$

$f'(0)=(2-0)e^0=2$ qui est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A.

Cette tangente a pour équation réduite : $y=2x+1$.

Affirmation 3 : **FAUSSE**

Preuve

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$ $\quad e^{2x}-e^x=e^x\times e^x-e^x=e^x(e^x-1)$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-1=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-e^x=+\infty$

conséquence : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-e^x+\frac{3}{x}=+\infty$.

Affirmation 4 : **VRAIE**

Preuve

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;2] par $f(x)=1-x+e^{-x}$.

$f'(x)=-1-e^{-x}<0$ $\quad f(0)=1-0+e^0=1+1=2>0$ $\quad f(2)=1-2+e^{-2}=-1+e^{-2}<0$

0 appartient à l'intervalle $[f(2);f(0)]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α par f appartenant à [0;2].

C'est à dire l'équation $1-x+e^{-x}=0$ admet une unique solution appartenant à [0;2].

Affirmation 5 : **VRAIE**

Preuve

g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2-5x+e^x$

$g'(x)=2x-5+e^x$

$g''(x)=2+e^x>0$

Donc g est une fonction convexe.