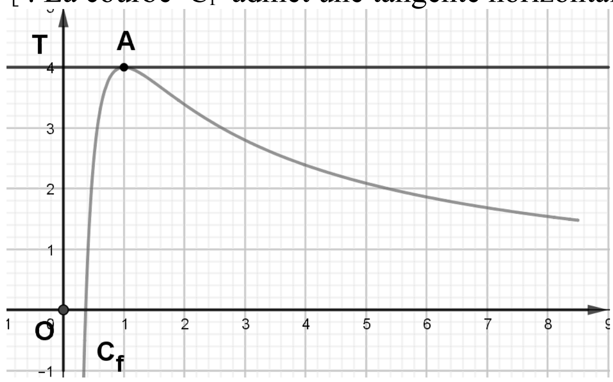
## Exercice B au choix du candidat 5 points

**Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.**
**Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.**
**Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.**

**EXERCICE B**

**Principaux domaines abordés:**
**Fonction logarithme népérien; convexité**

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $C_f$ représentative d'une fonction $f$, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. La courbe $C_f$ admet une tangente horizontale $T$ au point $A(1;4)$.




**1.** Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction $f$ est définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{a+b\ln(x)}{x}$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.

**2.** Démontrer que pour tout réel $x$ strictement positif, on a :

$$f'(x)=\frac{b-a-b\ln(x)}{x^2}$$

**3.** En déduire les valeurs de $a$ et $b$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction $f$ est définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{4+4\ln(x)}{x}$.

**4.** Déterminer les limites de $f$ en $0$ et en $+\infty$.

**5.** Déterminer le tableau de variations de $f$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

**6.** Démontrer que, pour tout réel $x$ strictement positif, on a :

$$f''(x)=\frac{-4+8\ln(x)}{x^3}.$$

**7.** Montrer que la courbe $C_f$ possède un unique point d'inflexion $B$ dont on précisera les coordonnées.

## CORRECTION

**1.** $A(1;4)$ donc $f(1)=4$

$T$ est horizontale donc $f'(1)=0$ .

**2.** $x\in]0;+\infty[$ $\quad f(x)=\dfrac{a+b\ln(x)}{x}$

$u(x)=a+b\ln(x) \qquad u'(x)=\dfrac{b}{x} \qquad v(x)=x \qquad v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{x\times\left(\frac{b}{x}\right)-1\times(a+b\ln(x))}{x^2}=\frac{b-a-b\ln(x)}{x^2}.$$

**3.** $f(1)=4 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{a}{1}=4 \quad\Leftrightarrow\quad a=4$

$f'(1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{b-a}{1^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=b$

donc $a=b=4$ et $f(x)=\dfrac{4+4\ln(x)}{x}$ .

**4.** $x\in]0;+\infty[$ $\quad f(x)=(4+4\ln(x))\times\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}4+4\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ .

. $\dfrac{4+4\ln(x)}{x}=\dfrac{4}{x}+4\times\dfrac{\ln(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ .

**5.** Pour tout $x$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ , $f'(x)=\dfrac{4-4-4\ln(x)}{x^2}=\dfrac{-4\ln(x)}{x^2}$ .

$x^2>0$ et $f'(1)=0$ .

Si $0<x<1$ alors $\ln(x)<0$ et $f'(x)>0$ .

Si $1<x$ alors $\ln(x)>0$ et $f'(x)<0$ .

Tableau de variations de $f$

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | 0 | – | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | 4 | ↘ | 0 |

**6.** $u(x)=-4\ln(x) \qquad u'(x)=-\dfrac{1}{x} \qquad v(x)=x^2 \qquad v'(x)=2x$

$$f''(x)=\frac{x^2\times\left(-\frac{4}{x}\right)-2x\times(-4\ln(x))}{(x^2)^2}=\frac{-4x+8x\ln(x)}{x^4}=\frac{-4+8\ln(x)}{x^3}$$

**7.** $x\in]0;+\infty[$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4+8\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=0{,}5 \Leftrightarrow x=e^{0,5}$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow -4+8\ln(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x)>0{,}5 \Leftrightarrow x>e^{0,5}$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow -4+8\ln(x)<0 \Leftrightarrow \ln(x)<0{,}5 \Leftrightarrow x<e^{0,5}$

On donne le signe de $f''$ sous forme de tableau

| x | 0 | | $e^{0.5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f ''(x) | ‖ | − | 0 | + | |

$f''$ est nulle pour une seule valeur et en cette elle change de signe donc $C_f$ admet un unique point d'inflexion I d'abscisse $e^{0,5}$.

$f(e^{0,5})=\frac{4+4\ln(e^{0,5})}{e^{0,5}}=\frac{4+4\times 0{,}5}{e^{0,5}}=6e^{-0,5}$.

$I(e^{0,5};6e^{-0,5})$