Exercice 1 commun à tous les candidats 5 points

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$ suivant cette modélisation. Ainsi $u_0=1000$.

1. Calculer u_1 .

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0,9u_n+250$.

3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite(n):
  u=1000
  for i in range(n):
    u=0.9*u+250
  return u
```

4.a. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout enytier naturel n, $u_n \leqslant 2500$.

4.b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4.c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

5. Soit (u_n) la suite définie par $v_n=u_n-2500$ pour tout entier naturel n.

5.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et de terme initial $v_0=-1500$.

5.b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

$u_n=-1500\times 0,9^n+2500$.

5.c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200. Déterminer cette année.

CORRECTION

1. En 2021, l'influenceuse perd $1000\times\frac{10}{100}=100$ abonnés et en gagne 250.

$u_1=1000+100+250=1150$

2. Pour tout entier naturel n :

En (2020+n) l'influenceuse à u_n abonnés, en (2020+n+1) l'influenceuse à u_{n+1} abonnés.

En (2020+n+1), l'influenceuse perd $u_n\times\frac{10}{100}=0{,}1\,u_n$ abonnés et on gagne 250.

$u_{n+1}=u_n-0{,}1\,u_n+250=0{,}9\,u_n+250$.

3. La valeur renvoyée par suite(10) est u_{10} .

Si on exécute le programme et si on arrondit à l'unité on obtient 1977, en 2020+10=2030 l'influenceuse aura 1977 abonnés.

4.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\leqslant 2500$.

Initialition

$u_0=1000\leqslant 2500$ donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose $u_n\leqslant 2500$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\leqslant 2500$.

Si $u_n\leqslant 2500$ alors $0{,}9\times u_n\leqslant 0{,}9\times 2500 \Leftrightarrow 0{,}9\,u_n\leqslant 2250$ et $0{,}9\,u_n+250\leqslant 2250+250$

$\Leftrightarrow u_{n+1}\leqslant 2500$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\leqslant 2500$.

4.b. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}-u_n=0{,}9\,u_n+250-u_n=250-0{,}1\,u_n=0{,}1\times(2500-u_n)\geqslant 0$.

La suite (u_n) est croissante.

4.c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2500 donc la suite (u_n) est convergente.

5.a. Pour tout entier naturel n :

$v_n=u_n-2500 \Leftrightarrow u_n=v_n+2500$

$v_{n+1}=u_{n+1}-2500=0{,}9\,u_n+250-2500=0{,}9\times(v_n+2500)-2250=0{,}9\,v_n+2250-2250=0{,}9\,v_n$.

La suite (v_n) est la suite géométrique de raison $0{,}9$ et de premier terme v_0 .

$v_0=u_0-2500=1000-2500=-1500$.

5.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=-1500\times 0{,}9^n$ et $u_n=v_n+2500=-1500\times 0{,}9^n+2500$.

5.c. $0\leqslant 0{,}9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2500$.

Le nombre d'abonnés de l'influenceuse deviendra « voisin » de 2500 dans un avenir lointain.

6.

```
n=0
u=1000
while u<=2200:
  n=n+1
  u=0.9*u+250
print(n)
```

Si on exécute le programme on obtient 16.

Donc, en $2020+16=2036$, le nombre d'abonnés deviendra, pour la première année, supérieure à 2200.

On peut vérifier en utilisant la calculatrice :

$u_{15}=1191$ (arrondi à l'unité) $u_{16}=1222$ (arrondi à l'unité).