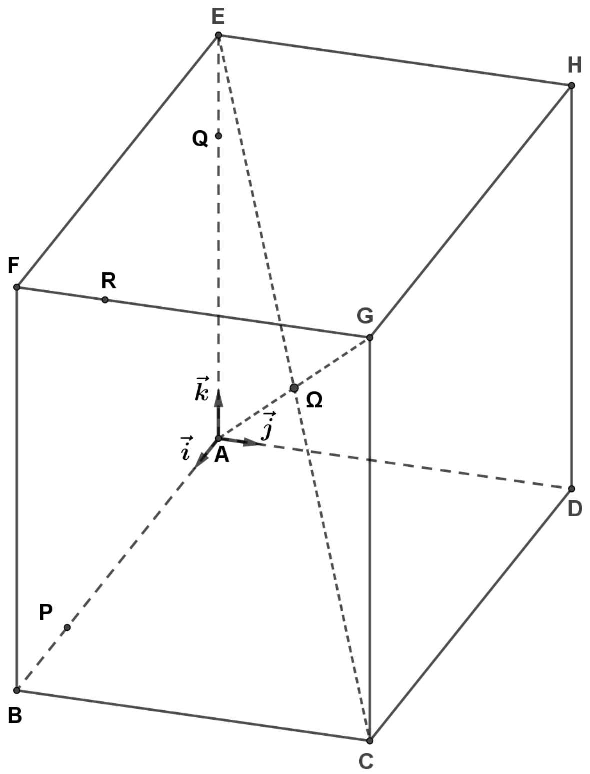
Exercice 2 commun à tous les candidats 5 points

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre Ω.

Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ avec $\vec{i}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie 1

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont (8;2;8).
   Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x-5y+z-6=0$.

Partie 2

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont (4;4;4).
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3};\frac{2}{3};\frac{14}{3}\right)$.
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

CORRECTION

Partie 1

1. A(0;0;0) B(8;0;0) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ $P(6;0;0)$.

A(0;0;0) E(0;0;8) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ $\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$ $Q(0;0;6)$.

2. $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ R(8;2;8) $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR).

$\vec{n}.\overrightarrow{PQ}=1\times(-6)-5\times 0+1\times 6=-6+0+6=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{PR}=1\times 2-5\times 2+1\times 8=2-10+8=0$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (PQR).

3. M(x;y;z) appartient au plan (PQR) si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{PM}=0$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}x-6\\y\\z\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad 1\times(x-6)-5\times y+1\times z=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-5y+z-6=0$

Partie 2

1. G(8;8;8) et Ω est le milieu de [AG]. $\Omega\left(\frac{8+0}{2};\frac{8+0}{2};\frac{8+0}{2}\right)$, $\Omega\ (4;4;4)$.

2. d est la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par Ω.

$$(d):\begin{cases}x=1\times t+4\\y=-5\times t+4\\z=1\times t+4\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

3. On résout le système :

$$\begin{cases}x-5y+z-6=0\\x=t+4\\y=-5t+4\\z=t+4\end{cases}\quad \text{on obtient : } (t+4)-5(-5t+4)+(t+4)-6=0$$

$$\Leftrightarrow \quad t+4+25t-20+t+4-6=0 \quad \Leftrightarrow \quad 27t-18=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{2}{3}+4=\frac{14}{3};\quad y=-\frac{10}{3}+4=\frac{2}{3};\quad z=\frac{2}{3}+4=\frac{14}{3}\qquad L\left(\frac{14}{3};\frac{2}{3};\frac{14}{3}\right)$$

4. La distance du point Ω au plan (PQR) est égale à ΩL.

$$\Omega L^2=\left(\frac{14}{3}-4\right)^2+\left(\frac{2}{3}-4\right)^2+\left(\frac{14}{3}-4\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}+\frac{100}{9}+4\times 9=\frac{108}{9}=12.$$

$\Omega L=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.