Exercice 3 commun à tous les candidats 5 points

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).
Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux ettres dans ce sac. On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle et d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.

1.a. Déterminer le nombre de tirages possibles.

1.b. Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.
Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2. Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.
On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à on soustrait la somme payée).

2.a. Déterminer la loi de probabilité de G.

2.b. Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que jeu reste favorable au joueur ?

3. Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.

3.a. Justifier que X suit une loi binomiale de donner ses paramètres.

3.b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.

3.c. Calculer $P(X \geqslant 5)$ en arrondissant à 10^{-3}. Donner une interprétation du résultat obtenu.

3.d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$.

CORRECTION

1.a. Le nombre de tirages possibles est le nombre de parties de 2 éléments d'un ensemble de 8 éléments, c'est-à-dire $\binom{8}{2}=\frac{8\times 7}{2}=28$.

1.b. Pour gagner il faut tirer la voyelle A et une consonne parmi les 6 consonnes **ou** il faut tirer la voyelle E et une consonne parmi les 6 consonnes.
Il y a donc $6+6=12$ tirages gagnants.
La probabilité que le joueur gagne : $\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$.

2.a. La variable aléatoire G prend 2 valeurs : $10-k$ si le joueur gagne et $-k$ si le joueur perd.
$P(G=10-k)=\frac{3}{7}$ $\quad$ $P(G=-k)=1-37=\frac{4}{7}$
On donne la loi de probabilité de G sous la forme d'un tableau.

g_i	-k	10-k
$P(G=g_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

2.b. On calcule l'espérance mathématique de G :
$$E(G)=-k\times\frac{4}{7}+(10-k)\times\frac{3}{7}=\frac{-4k+30-3k}{7}=\frac{30-7k}{7}\ .$$
Le jeu est favorable au joueur si et seulement si $E(G)\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 30-7k\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{30}{7}\geqslant k$.
k est un entier naturel non nul.
Le jeu est favorable au joueur si et seulement si k est un entier naturel non nul supérieur ou égal à 4.

3.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
Le joueur tire simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.
Succès : « le joueur gagne c'est à dire tire une voyelle et une consonne » la probabilité de succès est égale à $p=\frac{3}{7}$.

Échec : « le joueur perd » la probabilité de l'échec est $q=\frac{4}{7}$.

Les lettres tirées sont remises dans le sac.
On effectue des tirages au hasard (c'est à dire tirages indépendants) avec remise et X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 10 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{3}{7}$.

3.b. $P(X=4)=\binom{8}{4}\times\left(\frac{3}{7}\right)^4\times\left(\frac{4}{7}\right)^6$ en utilisant la calculatrice $P(X=4)=0{,}247$ à 10^{-3} près.

3.c. $P(X\geqslant 5)=0{,}440$ à 10^{-3} près (en utilisant la calculatrice).
La probabilité que le joueur gagne au moins 5 parties est égale à 0,440.

3.d. $P(X\leqslant 5)=0{,}782$ et $P(X\leqslant 6)=0{,}921$.
Le plus petit entier naturel n tel que $P(X\leqslant n)\geqslant 0{,}9$ est 6.