Exercice A au choix du candidat 5 points

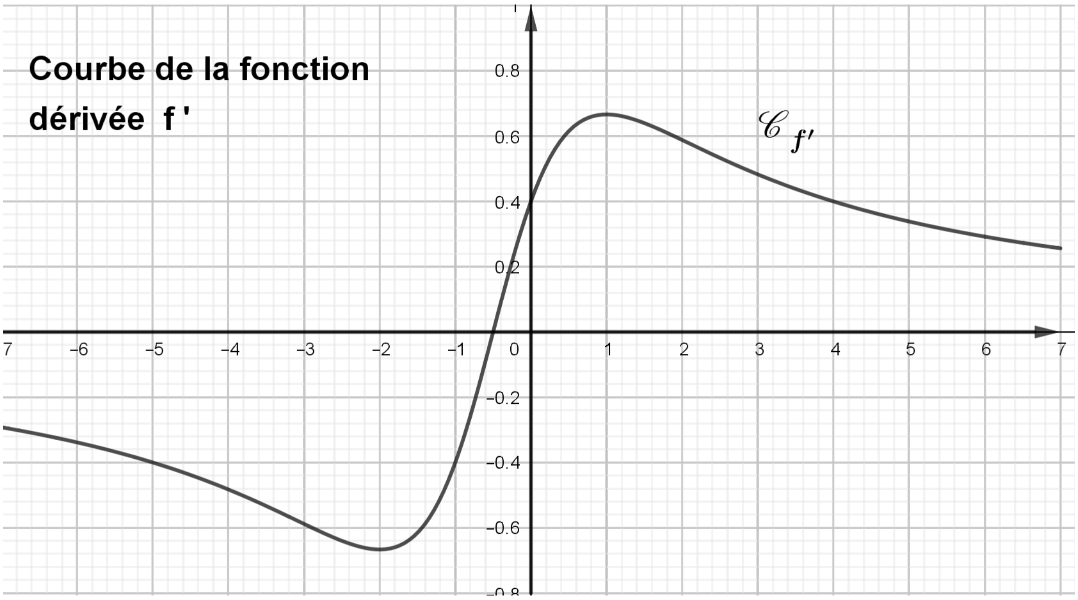
Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE A

Principaux domaines abordés:
Fonction logarithme népérien; convexité

Partie : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.

2.a. Donner les variations de la fonction dérivée f'.

2.b. En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie 2 : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.

4.a. Justifier que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

4.b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f''(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}$$
Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

CORRECTION

Partie 1

1. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f est : $f'(0)$.
Par lecture graphique $f'(x)=0{,}4$.

2.a. Par lecteur graphique :
f' est décroissante sur $]-\infty;-2]$
f' est croissante sur $[-2;1]$
f' est décroissante sur $[1;+\infty[$.

2.b. On suppose que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' sa dérivée.
Si $x\in]-\infty;-2]$ alors $f''(x)\leqslant 0$.
Si $x\in[-2;1]$ alors $f''(x)\geqslant 0$.
Si $x\in[1;+\infty[$ alors $f''(x)\leqslant 0$.
Donc [-2;1] est le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Partie 2

1. $f(x)=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$

$u(x)=x^2+x+\frac{5}{2}$ $\quad \Delta=1-4\times 1\times\frac{5}{2}=-9$

donc pour tout nombre réel x, $u(x)>0$ et f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2. $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ $\quad u(x)=x^2+x+\frac{5}{2}$ $\quad u'(x)=2x+1$

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

3. Pour tout nombre réel x, $x^2+x+\frac{5}{2}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de 2x+1.

$2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ $\quad 2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$ $\quad 2x+1<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	$\ln(\frac{9}{4})$	↗	$+\infty$

$$\ln\left(\frac{9}{4}\right)\simeq 0{,}81$$

4.a. f est dérivable et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$, à valeurs dans $\left[\ln\left(\frac{9}{4}\right);+\infty\right[$.

$\ln\left(\frac{9}{4}\right)\simeq 0{,}81$ donc $2\in\left[\ln\left(\frac{9}{4}\right);+\infty\right[$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 2 admet un unique antécédent α appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ c'est à dire que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

4.b. En utilisant la calculatrice :

$f(1)=1{,}5$ $\quad f(2)=2{,}14$ $\quad 1<\alpha<2$

$f(1{,}6)=1{,}99$ $\quad f(1{,}7)=2{,}03$ $\quad 1{,}6<\alpha<1{,}7$

$\alpha=1{,}6$ à 10^{-1} près.

5. On détermine le signe de $f''(x)$ qui est le signe de $N(x)=-2x^2-2x+4$ sur $\mathbb{R}$.

$\Delta=4-4\times(-2)\times 4=36=6^2$

$x_1=\frac{2-6}{2\times(-2)}=\frac{-4}{-4}=1$ $\qquad x_2=\frac{2+6}{2\times(-2)}=\frac{8}{-4}=-2$

Le coefficient de x^2 est négatif donc :

x	-∞		-2		1		+∞
f ''(x)		–	0	+	0	–	

La fonction dérivée seconde s'annule en changeant de signe 2 fois pour x=-2 et pour x=1 donc : la courbe représentative de f admet 2 points d'inflexion.