Exercice B au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE B

Principaux domaines abordés:
Etude de fonction - Fonction exponentielle - Equations différentielles

Partie 1

Considérons l'équation différentielle : $y'=-0{,}4y+0{,}4$ où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

1.a. Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.

1.b. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

2. Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0)=10$.

Partie 2

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $p(t)=\frac{1}{g(t)}=\frac{1}{1+9e^{-0{,}4t}}$.

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.

2. Montrer que $p'(t)=\frac{3{,}6e^{-0{,}4t}}{(1+9e^{-0{,}4t})^2}$ pour tout $t\in[0;+\infty[$.

3.a. Montrer que l'équation $p(t)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.

3.b. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide de la calculatrice.

Partie 3

1. p désigne la fonction de la partie 2.
Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y'=0{,}4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0)=\frac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet. Une politique volontariste d'équipement est mise en Oeuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par p(t).
Interpréter dans ce contexte la limite de la question 1 de la partie 2 puis la valeur approchée de α de la question 3.b. de la partie 2 ainsi que la valeur p(0).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie 1

1.a. $y'=-0{,}4\,y+0{,}4$

Soit h la fonction constante égale à 1. h(t)=1 pour tout t appartenant à $[0;+\infty[$.

$h'(t)=0$ et $h'(t)=0=-0{,}4\times1+0{,}4=0=-0{,}4\times h(t)+0{,}4$ donc :

h est une solution particulière de l'équation différentielle $y'=-0{,}4\,y+0{,}4$.

1.b. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'=-0{,}4\,y$ est l'ensemble des fonctions $(k\in\mathbb{R})$ telles que $f_k(t)=k\,e^{-04t}$ avec $t\in[0;+\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'=-0{,}4\,y+0{,}4$ est l'ensemble des fonctions g_k $(k\in\mathbb{R})$ telles que $g_k(t)=k\,e^{-0{,}4t}+1$ avec $t\in[0;+\infty[$.

2. $g_k(0)=10=k\,e^0+1 \iff 10=k+1 \iff k=9$

$g_9=9e^{-0{,}4t}+1$ et $g=g_9$ donc $g(t)=9e^{-0{,}4t}+1$

Partie 2

1. $p(t)=\dfrac{1}{g(t)}=\dfrac{1}{1+e^{-0{,}4t}}$

$\lim\limits_{t\to+\infty}(-0{,}4t)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-0{,}4t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}(1+9e^{-0{,}4t})=1$

$\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)=\dfrac{1}{1}=1$

2. $g(t)=1+9e^{-0{,}4t}$ $\qquad$ $g'(t)=9\times(-0{,}4e^{-0{,}4t})=-3{,}6e^{-0{,}4t}$

$\left(\dfrac{1}{g}\right)'=\dfrac{-g'}{g^2}$ $\qquad$ $p'(t)=\dfrac{3{,}6e^{-0{,}4t}}{(1+9e^{-04t})^2}$

3.a. Pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $e^{-0{,}4t}>0$ donc $p'(t)>0$ et la fonction p est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $p(0)=\dfrac{1}{10}=0{,}1$.

p est dérivable et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans $[0{,}1:1[$.

$\dfrac{1}{2}\in[0{,}1;1[$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que $\dfrac{1}{2}$ admet un unique antécédent α appartenant à $[0:+\infty[$ c'est à dire que l'équation $p(t)=\dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α appartenant à $[0;+\infty[$.

3.b.

$p(0)=0{,}1$	$p(0)\simeq0{,}86$	$0<\alpha<10$
$p(5)\simeq0{,}45$	$p(6)\simeq0{,}55$	$5<\alpha<6$
$p(5{,}4)\simeq49007$	$p(5{,}6)\simeq0{,}5007$	$5{,}4<\alpha<5{,}5$

$\alpha=5{,}5$ à 10^{-1} près.

Partie 3

1. Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$.

$p(t)=\dfrac{1}{1+9e^{-0{,}4t}}$ $\qquad$ $p'(t)=\dfrac{3{,}6e^{-0{,}4t}}{(1+9e^{-0{,}4t})^2}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$1-p(t)=1-\frac{1}{1+9e^{-0,4t}}=\frac{1+9e^{-0,4t}-1}{1+9e^{-0,4t}}=\frac{9e^{-0,4t}}{1+9e^{-0,4t}}$

$0,4\times p(t)\times(1-p(t))=0,4\times\frac{1}{1+9e^{-0,4t}}\times\frac{9e^{-0,4t}}{1+9e^{-0,4t}}=\frac{3,6\times e^{-0,4t}}{(1+9e^{-0,4t})^2}=p'(t)$ et $p(0)=\frac{1}{10}$.

p est solution de l'équation différentielle $y'=0,4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0)=\frac{1}{10}$.

2. $p(0)=0,1=\frac{10}{100}$ 10 % des écoles ont accès à internet en 2020.

$\lim_{t\to+\infty} p(t)=1=\frac{100}{100}$ à très long terme presque 100 % des écoles auront accès à internet.

$p(5,5)=\frac{1}{2}=\frac{50}{100}$ 50 % des écoles auront accès à internet en 2025+6mois.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés